Mathematik für Naturwissenschaftler I

Dr. Peter Bauer

Institut für Mathematik
Universität Frankfurt am Main

Wintersemester 2024/25

Funktionen einer Variablen

1 Zahlen

1.1 Zahlmengen

Im täglichen Gebrauch trifft man vor allem auf die *natürlichen Zahlen*

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\} \ .$$

Gelegentlich wird auch die Bezeichnung $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$ benutzt.

Eine Erweiterung von $\mathbb{N}$ sind die *ganzen Zahlen*

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\} \ .$$

Diese sind "nützlich", da z.B. eine Gleichung wie $n + 5 = 3$ keine Lösung in $\mathbb{N}$ hat, d.h. es gibt kein $n \in \mathbb{N}$, so dass $n + 5 = 3$. In $\mathbb{Z}$ gibt es eine solche Lösung: mit $n = -2$ gilt $n + 5 = 3$.

In analoger Form lässt sich dies fortsetzen: $2 \cdot a = 5$ ist auch in $\mathbb{Z}$ nicht lösbar, erst in den *rationalen Zahlen* ("Brüche")

$$\mathbb{Q} = \left\{ r = \frac{n}{m} : n, m \in \mathbb{Z}, m \neq 0 \right\}$$

gibt es eine solche Lösung, nämlich $a = \frac{5}{2}$.

Es gibt auch Gleichungen, die in $\mathbb{Q}$ nicht lösbar sind, z.B. hat $x^2 = 2$ keine rationale Lösung. Diese Lösungen, hier also $\sqrt{2}$, und weitere nicht-rationale Zahlen, wie z.B. die „Kreiszahl" π, bilden zusammen mit den rationalen Zahlen die *reellen Zahlen* $\mathbb{R}$.[1]

Immer wieder einmal werden wir nur Teile der reellen Zahlen ansprechen wollen, z.B. alle Zahlen zwischen 0 und 1. Um solche *Intervalle* zu bezeichnen, gibt es spezielle Schreibweisen:

1.1.1 Notation

$$\begin{aligned}
[a, b] &= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} \\
]a, b] &= \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\} \\
[a, b[&= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\} \\
]a, b[&= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}
\end{aligned}$$

[1] Eine exakte Definition von $\mathbb{R}$ ist überraschend knifflig, wir belassen es daher bei dieser informellen Darstellung.

1.2 Komplexe Zahlen

Während die reellen Zahlen bereits eine Erweiterung der rationalen Zahlen sind, die im „täglichen Leben“ keine große Rolle spielen, wird in der Mathematik und vielen Naturwissenschaften sogar über $\mathbb{R}$ hinausgegangen.

Betrachten wir eine quadratische Gleichung wie $x^2+2x+2=0$. Mit der aus der Schule bekannten „p-q-Formel“ können wir versuchen, diese zu lösen:

$$x^2+2x+2=0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x=-1\pm\sqrt{1-2}=-1\pm\sqrt{-1}\ .$$

Bekanntlich (in Definition 1.5.4 werden wir das noch genauer sehen) gibt es so etwas wie $\sqrt{-1}$ aber gar nicht!

Tatsächlich gibt es keine reelle Zahl x, so dass $x^2+2x+2=0$. Andererseits möchte man gerne jede derartige Gleichung lösen können. Ein Ausweg besteht darin, die reellen Zahlen zu verlassen und $\mathbb{R}$ zu erweitern (wie die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ zu den rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{Q}$ zu den reellen Zahlen $\mathbb{R}$ erweitert wurden):

1.2.1 Definition Seien $x, y \in \mathbb{R}$. Dann heißt der Ausdruck

$$z = x + iy$$

komplexe Zahl. i heißt *imaginäre Einheit* und es gilt

$$i^2 = -1\ .$$

$\operatorname{Re} z = x$ ist der *Realteil* von z und $\operatorname{Im} z = y$ ist der *Imaginärteil* von z.

Die Menge der komplexen Zahlen wird mit $\mathbb{C}$ bezeichnet.

1.2.2 Beispiele **(1)** $z = 1-2i \in \mathbb{C} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{Re} z = 1\ , \quad \operatorname{Im} z = -2$

(2) $z = i \in \mathbb{C} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{Re} z = 0\ , \quad \operatorname{Im} z = 1$

(3) $z = 2 \in \mathbb{C} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{Re} z = 2\ , \quad \operatorname{Im} z = 0$

1.2.3 Bemerkung Das letzte Beispiel zeigt, dass jede reelle Zahl auch eine komplexe Zahl ist ($\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$).

Das ist deshalb wichtig, weil daher alle Resultate, die in $\mathbb{C}$ gelten, automatisch auch in $\mathbb{R}$ gültig sind. *Ich werde daher Sätze und Definitionen oft nur für $\mathbb{C}$ formulieren, sie gelten dann aber natürlich analog in $\mathbb{R}$.*

1.3 Rechnen mit komplexen Zahlen

Wir können mit diesen komplexen Zahlen rechnen, wie wir es in $\mathbb{R}$ gewohnt sind. Man behandelt i einfach wie eine Konstante und ersetzt bei Bedarf i^2 durch -1:

$$\begin{aligned}
(a+ib)+(c+id) &= a+c+i(b+d)\\
(a+ib)-(c+id) &= a-c+i(b-d)\\
(a+ib)\cdot(c+id) &= ac+iad+ibc+i^2bd\\
&= ac+iad+ibc+(-1)bd\\
&= ac-bd+i(ad+bc)
\end{aligned}$$

1.3.1 Beispiele

$$\begin{aligned}(2+i)+(1-2i) &= 3-i\\ (2+i)-(1-2i) &= 1+3i\\ (2+i)\cdot(1-2i) &= 2-(-2)+i(-4+1) = 4-3i\end{aligned}$$

Addition, Subtraktion und Multiplikation komplexer Zahlen ist also unproblematisch. Zur Division zweier komplexer Zahlen empfiehlt es sich, den Bruch geschickt zu erweitern:

$$\begin{aligned}\frac{a+ib}{c+id} &= \frac{(a+ib)(c-id)}{(c+id)(c-id)}\\ &= \frac{ac+bd+i(bc-ad)}{c^2+d^2+i(cd-cd)}\\ &= \frac{ac+bd+i(bc-ad)}{c^2+d^2}\\ &= \frac{ac-bd}{c^2+d^2}+i\,\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\end{aligned}$$

Um eine Zahl also durch $c+id$ zu teilen, erweitern wir den Quotienten mit $c-id$.

1.3.2 Beispiel

$$\begin{aligned}\frac{4+2i}{1+i} &= \frac{(4+2i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}\\ &= \frac{6-2i}{2}\\ &= 3-i\end{aligned}$$

Der Wechsel von $c+id$ zu $c-id$ hat einen Namen:

1.3.3 Definition Sei $z=x+iy$. Dann heißt

$$\overline{z} = x-iy$$

die zu z *konjugiert komplexe Zahl*.

1.3.4 Satz (Rechenregeln)

(1) $\overline{z\pm w} = \overline{z}\pm\overline{w}$

(2) $\overline{z\cdot w} = \overline{z}\cdot\overline{w}$

(3) $\overline{\overline{z}} = z$

1.3.5 Bemerkung Die Gleichung $x^2+2x+2=0$ aus (1) hat natürlich immer noch keine reelle Lösung, in $\mathbb{C}$ können wir nun aber Lösungen finden:

$$z^2+2z+2=0 \qquad\Leftrightarrow\qquad z=-1\pm i\ .$$

Rechnen wir dies z.B. für $z=-1+i$ nach:

$$(-1+i)^2+2(-1+i)+2 = (-1+i)(-1+i)+2(-1+i)+2 = 1+i^2-2i-2+2i+2 = 0\ .$$

1.3.6 Bemerkung Ein Manko haben komplexe Zahlen: es gibt keine „größer“- oder „kleiner“-Relation zwischen ihnen! Bei zwei verschiedenen reellen Zahlen lässt sich immer sagen, welche von beiden die größere (oder kleinere) ist. Bei komplexen Zahlen ist das nicht möglich.

1.4 Die Gaußsche Zahlenebene

Die reellen Zahlen stellt man sich gerne als Gerade vor. Analog kann man sich die komplexen Zahlen als Ebene (sog. *Gaußsche Ebene*) vorstellen. Der Realteil wird dabei auf der horizontalen, der Imaginärteil auf der vertikalen Koordinatenachse (*reelle* bzw. *imaginäre Achse*) eingetragen. Jeder komplexen Zahl $z = x + iy$ entspricht dann der Punkt mit den Koodinaten (x, y).

Der Addition zweier komplexer Zahlen entspricht in dieser Vorstellung die aus der Schule bekannte „Vektoraddition“ (Abb. 1) und der Konjugation $\overline{x + iy} = x - iy$ entspricht die Spiegelung an der reellen Achse.

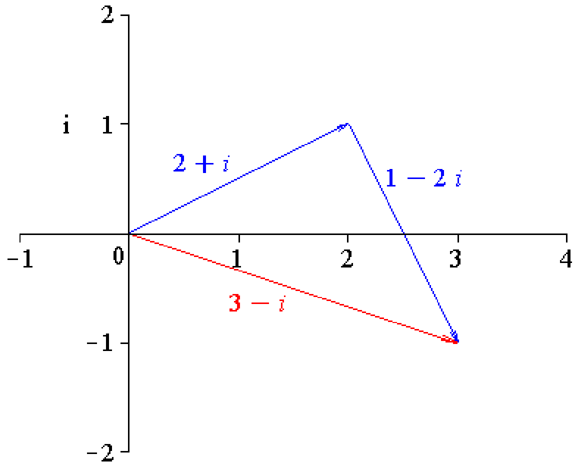

Abbildung 1: $(2 + i) + (1 - 2i) = 3 - i$

1.5 Potenzen, Wurzeln und Logarithmen

Zuerst definieren wir einmal genauer die *Potenz* einer (reellen oder komplexen) Zahl:

1.5.1 Definition Sei $a \in \mathbb{C}$ (oder $a \in \mathbb{R}$, vgl. Bemerkung 1.2.3) und $n \in \mathbb{N}$. Es ist

$$a^0 = 1 \quad , \quad a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n\text{-mal}} \quad \text{und} \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad \text{für } a \neq 0 \ .$$

1.5.2 Satz (Rechenregeln) Seien $a, b \in \mathbb{C}$ und $n, m \in \mathbb{Z}$. Es gilt

$$\begin{aligned} a^n \cdot a^m &= a^{n+m} \\ a^n \cdot b^n &= (ab)^n \\ (a^n)^m &= a^{nm} \end{aligned}$$

Zum Beispiel ist $\frac{1}{2} \cdot 2^3 = 2^{-1} \cdot 2^3 = 2^{(-1+3)} = 2^2 = 4$.

Eine recht einfache Abschätzung für die Größe von Potenzen *reeller* Zahlen (bei komplexen Werten macht die Frage nach ihrer „Größe“ keinen Sinn) gibt uns die Bernoullische Ungleichung:

1.5.3 Satz (Bernoullische Ungleichung) Sei $a \in \mathbb{R}$ mit $a \geq -1$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$(1 + a)^n \geq 1 + na \ .$$

Wenn wir Potenzen kennen, können wir auch Wurzeln und Logarithmen definieren — zumindest für reelle Zahlen. (In $\mathbb{C}$ ist dieses Thema etwas komplizierter, darum kümmern wir uns später.)

1.5.4 Definition Sei $q \in \mathbb{N}$, a reell und $a \geq 0$, falls q gerade ist. Dann heißt die Lösung x der Gleichung $x^q = a$ die *q-te Wurzel* aus a:

$$x = \sqrt[q]{a} = a^{\frac{1}{q}} \ .$$

Bei geradem q gibt es mehrere Lösungen (z.B. gilt $x^2 = 1$ sowohl für $x = 1$ als auch für $x = -1$), dann verstehen wir unter der Wurzel stets die Lösung mit $x \geq 0$.

Die zweite Wurzel wird i.a. einfach als "Wurzel" bezeichnet und $\sqrt{\cdot}$ statt $\sqrt[2]{\cdot}$ geschrieben.

Wurzeln sind eigentlich nichts anderes als Potenzen mit rationalen Exponenten. Es gelten die gleichen Rechenregeln wie oben, z.B. $3^2 \cdot \sqrt{3} = 3^2 \cdot 3^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{5}{2}}$.

1.5.5 Bemerkung Hier sehen wir nun auch, dass ein Ausdruck wie $\sqrt{-1}$ nicht definiert ist: In der Definition wird $a \geq 0$ verlangt.

Das hat einen guten Grund: es gibt keine reelle Zahl, deren Quadrat negativ ist.

Aber auch in $\mathbb{C}$ wäre es fatal, mit Wurzeln aus negativen Zahlen zu rechnen, denn dies würde sehr schnell zu unsinnigen Ergebnissen führen:

$$\begin{aligned} -1 = i^2 = i \cdot i = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} &= \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1 \\ \Rightarrow \qquad -1 &= 1 \end{aligned}$$

Eine Aussage wie „i ist die Wurzel aus -1" ist also nichts als Quatsch.

Ähnlich wie die Wurzel-Definition liest sich die Definition des Logarithmus:

1.5.6 Definition Sei $a > 0$, $b > 1$, beide reell. Dann heißt die (eindeutig bestimmte) Lösung x der Gleichung $b^x = a$ *Logarithmus von a zur Basis b*:

$$x = \log_b a \ .$$

1.5.7 Satz (Rechenregeln) Für $b, c > 1$ und $x, y > 0$ gilt

$$\begin{aligned} \log_b 1 &= 0 && \text{(weil } b^0 = 1) \\ \log_b b &= 1 && \text{(weil } b^1 = b) \\ \log_b (x \cdot y) &= \log_b x + \log_b y \\ \log_b x^y &= y \cdot \log_b x \\ \log_b x &= \frac{\log_c x}{\log_c b} \end{aligned}$$

Die letzte Regel ist z.B. beim Rechnen mit Taschenrechnern nützlich, die meist nur Logarithmen zu wenigen Basen kennen (z.B. zur Basis c=10): Mit $x = 2$ und $b = 3$ folgt

$$\log_3 2 = \frac{\log_{10} 2}{\log_{10} 3} \approx \frac{0.301}{0.477} \approx 0.631 \ .$$

1.6 Summen

Es gibt eine spezielle Schreibweise für Summen vieler (evtl. sogar unendlich vieler) Summanden:

1.6.1 Notation

$$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$$

und allgemeiner

$$x_m + x_{m+1} + x_{m+2} + \cdots + x_n = \sum_{k=m}^{n} x_k$$

1.6.2 Beispiel Die Summe der ersten 100 ungeraden Zahlen können wir mit dieser Schreibweise darstellen als

$$\sum_{k=1}^{100} 2k - 1 = 1 + 3 + 5 + \cdots + 199 \ .$$

Eine spezielle Summenformel wird häufiger benötigt:

1.6.3 Satz (geometrische Summe) Für reelle oder komplexe $z \neq 1$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt für die *geometrische Summe*

$$\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{z^{n+1} - 1}{z - 1} \ .$$

1.6.4 Beispiele **(1)** $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \cdots + 2^n = \sum_{k=0}^{n} 2^k = \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} = 2^{n+1} - 1$

(2) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1}{\frac{1}{2} - 1} = 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$

1.7 Der Betrag

Anschaulich bezeichnet der *Betrag* einer Zahl die Entfernung der Zahl zum Nullpunkt. Mit dem Satz von Pythagoras können wir dies mathematisch gut ausdrücken (Abbildung 2):

1.7.1 Definition $|x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}$ heißt *Betrag* von $x + iy \in \mathbb{C}$.

1.7.2 Satz (Rechenregeln) Seien $z, w \in \mathbb{C}$. Dann gilt

(1) $|z| \geq 0$ und $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

(2) $|z| = |-z|$ und $|\overline{z}| = |z|$

(3) $|zw| = |z| \cdot |w|$

(4) $|z + w| \leq |z| + |w|$ (*Dreiecksungleichung*)

(5) Speziell für den Betrag reeller Zahlen $x \in \mathbb{R}$ gilt außerdem

$$x \leq |x| \qquad \text{und} \qquad -x \leq |x|$$