Mathematik für Naturwissenschaftler I

Musterlösung Blatt 9

Aufgabe 9.1

(a)

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

Die Reihe kann zur Geometrischen Reihe erweitert werden:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k + \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 2 - 1 = 1$$

Die Reihe konvergiert gegen 1.

(b) Die Terme der Reihe können nach oben abgeschätzt werden:

$$\frac{1}{k^2} \geq \frac{1}{k^k}, \forall k \in \mathbb{N}$$

Nach dem Majorantenkriterium konvergiert die Reihe, da auch $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergiert.

(c)

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{k+1}{k^2}\right)$$

Da es sich um eine alternierende Reihe handelt, untersuchen wir diese mittels Leibniz-Kriterium:

$$a_k = \frac{k+1}{k^2} = \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2} \geq \frac{1}{k+1} + \frac{1}{(k+1)^2} = a_{k+1}$$

 $\Rightarrow a_k$ ist monoton fallend

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k+1}{k^2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{k}}{k} = 0 \Rightarrow a_k \text{ ist eine Nullfolge}$$

Somit ist nach dem Leibniz-Kriterium die Reihe konvergent.

(d)

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\ln(k)}$$

Erneut untersuchen wir die alternierende Reihe mit dem Leibniz-Kriterium:

Da der $\ln$ eine monoton steigende Funktion ist, ist der Kehrwert monoton fallend:

$$a_k = \frac{1}{\ln(k)} \geq \frac{1}{\ln(k+1)} = a_{k+1} \Rightarrow a_k \text{ ist monoton fallend}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \ln(k) = \infty \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln(k)} = 0$$

$\Rightarrow a_k$ ist eine Nullfolge

Somit ist die Reihe nach dem Leibnizkriterium eine konvergente Reihe.

Aufgabe 9.2

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}, \quad a_k = \frac{1}{k!}, \quad z_0 = 0$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{k!}}{\frac{1}{(k+1)!}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(k+1)!}{k!} = \lim_{k \rightarrow \infty} (k+1) = \infty$$

Da der Konvergenzradius R unendlich ist, konvergiert die Reihe für alle komplexen Zahlen.

Aufgabe 9.3

(a)

$$\int \frac{x^3 - 2x^2 + 6}{x^2 - 3x + 2} dx$$

1. Polynomdivision:

$$(x^3 - 2x^2 + 6) : (x^2 - 3x + 2) = x + 1 + \frac{x + 4}{x^2 - 3x + 2}$$

$$\begin{array}{r} x^3 - 3x^2 + 2x \\ \hline x^2 - 2x + 6 \\ x^2 - 3x + 2 \\ \hline \end{array}$$

$$x + 4$$

$$\Rightarrow \int \left(x + 1 + \frac{x + 4}{x^2 - 3x + 2} \right) dx = \int (x + 1) dx + \int \frac{x + 4}{x^2 - 3x + 2} dx$$

Betrachte den letzten Term:

$$\int \frac{x + 4}{x^2 - 3x + 2} dx$$

2. Linearfaktorzerlegung des Nenners (Nullstellen erraten oder durch pq-Formel bestimmen):

$$x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$$

3. Partialbruchzerlegung:

$$\frac{x+4}{x^2-3x+2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2) + B(x-1)}{x^2-3x+2}$$
$$\Rightarrow A(x-2) + B(x-1) = x+4$$

4. Koeffizientenvergleich:

$$(A+B)x = x \Rightarrow (A+B) = 1$$
$$-B - 2A = 4$$
$$\Rightarrow A = -5, B = 6$$

5. Ausrechnen des Integrals:

$$\int \frac{x^3 - 2x^2 + 6}{x^2 - 3x + 2} dx = \int \left(x + 1 + \frac{x+4}{x^2-3x+2}\right) dx = \int (x+1) dx + \int \frac{x+4}{x^2-3x+2} dx$$
$$= \int (x+1) dx - \int \frac{5}{x-1} dx + \int \frac{6}{x-2} dx$$
$$\Rightarrow F(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - 5 \cdot \ln(|x-1|) + 6 \cdot \ln(|x-2|) + d, d \in \mathbb{R}$$

(b)

$$\int \frac{x^4 - x^2 + 1}{x^2 - 1} dx$$

1. Polynomdivision:

$$(x^4 - x^2 + 1) : (x^2 - 1) = x^2 + \frac{1}{x^2 - 1}$$
$$\begin{array}{r} x^4 - x^2 \\ \hline 1 \end{array}$$

$$\Rightarrow \int \left(x^2 + \frac{1}{x^2-1}\right) dx = \int x^2 dx + \int \frac{1}{x^2-1} dx$$

Betrachte den letzten Term:

$$\int \frac{1}{x^2-1} dx$$

2. Linearfaktorzerlegung des Nenners:

$$x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$$

3. Partialbruchzerlegung:

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} = \frac{A(x-1) + B(x+1)}{(x+1)(x-1)}$$

4. Koeffizientenvergleich:

$$(A+B)x = 0 \Rightarrow A+B = 0$$
$$A - B = 1$$
$$\Rightarrow A = -\frac{1}{2}, B = \frac{1}{2}$$

5. Ausrechnen des Integrals:

$$\begin{aligned}\int \frac{x^4 - x^2 + 1}{x^2 - 1} dx &= \int \left(x^2 + \frac{1}{x^2 - 1}\right) dx \\ &= \int x^2 dx + \int \frac{1}{x^2 - 1} dx = \int x^2 dx - \frac{1}{2} \int \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x-1} dx \\ \Rightarrow F(x) &= \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2} \cdot \ln(|x+1|) + \frac{1}{2} \cdot \ln(|x-1|) + d, \quad d \in \mathbb{R}\end{aligned}$$