Mathematik für Naturwissenschaftler I

Musterlösung Blatt 6

Aufgabe 6.1

(a)

$$f(x) = x^4 - 4x^3 - 1$$
$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 \stackrel{!}{=} 0$$
$$\Rightarrow x^2 \cdot (4x - 12) = 0$$
$$x_{1/2} = 0$$
$$x_3 = 3$$

Es werden die nächsten Ableitungen betrachtet:

$f''(x) = 12x^2 - 24x \quad \Rightarrow f''(0) = 0, \quad f''(3) = 36 > 0$

$f'''(x) = 24x - 24 \quad \Rightarrow f'''(0) = -24$

An dem Punkt $x = 3$ liegt wegen $f^{(2)}(3) > 0$ ein lokales Minimum(da n=2, gerade) vor. An dem Punkt $x = 0$ befindet sich wegen $f^{(3)}(0) \neq 0$ (n=3, ungerade) kein Extrempunkt. Das lokale Minimum von $f(x)$ ist $f(3) = -28$. $f(x)$ hat kein lokales Maximum.

(b)

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x$$
$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 4$$
$$f'(x) \stackrel{!}{=} 0$$
$$3x^2 - 6x + 4 = 0| : 3$$
$$\Rightarrow x^2 - 2x + \frac{4}{3} = 0$$

Mit der pq-Formel erhält man:

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q} \qquad \Rightarrow q = -2, p = \frac{4}{3}$$
$$x_{1/2} = 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4}{3}}$$
$$\Rightarrow x_{1/2} = 1 \pm \sqrt{-\frac{1}{3}}$$

Negative Zahl im Bruch gibt keine reelle Lösung. Also hat f(x) keine Extremstellen.

(c)

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2}$$
$$f'(x) = \frac{1+x^2-x(2x)}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \stackrel{!}{=} 0$$

Wenn der Zähler 0 wird, wird auch der Ausdruck 0.

$$1-x^2 \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow (1+x)(1-x) = 0$$
$$\Rightarrow x_1 = 1$$
$$\Rightarrow x_2 = -1$$

Es werden wieder die nächsten Ableitungen(mittels Quotientenregel) betrachtet:

$$f''(x) = \frac{-2x(1+x^2)^2 - (1-x^2)(2 \cdot 2x \cdot (1+x^2))}{(1+x^2)^4} = \frac{-2x-2x^3-4x+4x^3}{(1+x^2)^3} = \frac{-6x+2x^3}{(1+x^2)^3}$$

$$\Rightarrow f''(1) = \frac{-1}{2} < 0 \Rightarrow lokales Maximum$$
$$\Rightarrow f''(-1) = \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow lokales Minimum$$

Da $f^{(2)}(x_{1/2}) \neq 0$ (n=2, gerade), nimmt an Punkt $x_1 = 1$ die Funktion ihr lokales Maximum an mit $f(1) = 0.5$ und ihr lokales Minimum an Punkt $x_2 = -1$ mit dem Wert $f(-1) = -0.5$.

(d)

$$f(x) = \sqrt{1-x^2}$$
$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot (-2x) \cdot (1-x^2)^{\frac{-1}{2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \stackrel{!}{=} 0$$

Ausdruck wird 0 wenn der Zähler 0 wird, also $x_1 = 0$. Es werden wieder die nächsten Ableitungen betrachtet.

$$f''(x) = \frac{-1 \cdot \sqrt{1-x^2} - (-x) \cdot \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = \frac{-1 \cdot (1-x^2) - (-x)(-x)}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$
$$\Rightarrow f''(0) = -1 < 0 \Rightarrow Maximum$$

An Punkt x=0 liegt das lokale Maximum der Funktion f vor mit dem Wert $f(0) = 1$.

Aufgabe 6.2

(a)
$$\lim_{x\to 0}\frac{sin(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}$$

Da $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} g(x) = 0$ lässt sich nicht ohne weiteres der Grenzwert bestimmen. f(x) und g(x) sind in $x \neq 0$ differenzierbar und $g'(x) = 1$ also $g'(0) \neq 0$. Nach Satz 3.4.1 kann die Regel von de l'Hospital angewendet werden:

$$\lim_{x\to 0}\frac{sin(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{cos(x)}{1} = 1$$

(b)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x} = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$$
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$$

$f(x)$ und $g(x)$ sind differenzierbar in ganz $\mathbb{R}$ und es gilt:
$g'(x) = e^x \neq 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

Somit kann die Regel von de l'Hospital angewendet werden:
$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x} = \lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{2x}{e^x}$$

Wieder ist der Fall $\frac{\infty}{\infty}$ aufgetreten. Da $f'(x) = 2x$ und $g'(x) = e^x$ wieder auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar sind, und die zweite Ableitung von $g(x) = e^x = g''(x)$ wieder ungleich $0 \ \forall x \in \mathbb{R}$, lässt sich die Regel von de l'Hospital erneut anwenden.
$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x} = \lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{f''(x)}{g''(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{2}{e^x} = 0$$

(c)

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{ln(x)} = \lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{g(x)}$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to 1}(x-1) = 0$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to 1}(ln(x)) = 0$$
$g(x)$ und $f(x)$ sind in $x \neq 1$ differenzierbar. Außerdem gilt für $g'(x) = \frac{1}{x} \neq 0$

$\forall x \in D(g'(x))$. Somit kann die Regel von de l'Hospital angewendet werden:
$\lim\limits_{x\to 1} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 1} x = 1$

(d)

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 2 + e^{-x}}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} (e^x - 2 + e^{-x}) = 1 - 2 + 1 = 0$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} x^2 = 0$$

$g(x)$ und $f(x)$ sind auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar und für die Ableitung $g'(x) = 2x \neq 0$ $\forall x \neq 0$.
$\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{2x}$

Wieder ist der Fall $\frac{0}{0}$ aufgetreten. Wieder sind die Funktionen differenzierbar und es gilt $g'(x) = 2 \neq 0$ und es kann die Regel von de l'Hospital erneut angewendet werden:
$\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1$

Aufgabe 6.3

$$f(x) = \frac{-1}{8}(x^4 - 6x^2 - 11)$$
$$f'(x) = \frac{-1}{8}(4x^3 - 12x) = \frac{-1}{2}(x^3 - 3x)$$

(a) Startwert: $x_0 = -2$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \Rightarrow x_1 = -2 - \frac{\frac{19}{8}}{1} = -\frac{35}{6} = -4.375$$
$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \Rightarrow x_2 \approx -3.52348$$
$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} \Rightarrow x_3 \approx -3.00619$$
$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} \Rightarrow x_4 \approx -2.779627$$
$$x_5 = x_4 - \frac{f(x_4)}{f'(x_4)} \Rightarrow x_5 \approx -2.735132$$
$$x_6 = x_5 - \frac{f(x_5)}{f'(x_5)} \Rightarrow x_6 \approx -2.733522$$
$$x_7 = x_6 - \frac{f(x_6)}{f'(x_6)} \Rightarrow x_7 \approx -2.733520$$

Eine Nullstelle ist $x \approx -2.7335$.

i	0	1	2	3	4	5	6
x_i	-2	-4.375	-3.5234	-3.0061	-2.7796	-2.7351	-2.7335
$f(x_i)$	2.375	-30.0650	-8.5801	-2.0560	-0.2923	-0.0099	0
$f'(x_i)$	1	35.3076	16.5852	9.07336	6.5684	6.1276	6.1121

(b) Startwert: $x_0 = 1$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \Rightarrow x_1 = -1$$
$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \Rightarrow x_2 = 1$$
$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} \Rightarrow x_3 = -1$$

Das Verfahren alterniert zwischen zwei Zahlen und konvergiert somit nicht gegen eine Nullstelle.

(c) Startwert: $x_0 = 4$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \Rightarrow x_1 = \frac{683}{208} \approx 3.28365$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \Rightarrow x_2 \approx 2.8868$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} \Rightarrow x_3 \approx 2.7496$$

$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} \Rightarrow x_4 \approx 2.7337$$

$$x_5 = x_4 - \frac{f(x_4)}{f'(x_4)} \Rightarrow x_5 \approx 2.7335$$

Eine Nullstelle ist $x \approx 2.7335$.

i	0	1	2	3	4
x_i	4	3.28365	2.8868	2.7496	2.7337
$f(x_i)$	-18.625	-5.07064	-1.0559	-0.0995	-0.001
$f'(x_i)$	-26	-12.7773	-7.6985	-6.2695	-6.1141