Mathematatik für Naturwissenschaftler I
Musterlösung Blatt 5

Aufgabe 5.1:

$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

$D(\tan x) = \mathbb{R} \backslash \left\{\left(k + \frac{1}{2}\right) \cdot \pi\right\}$, $mit\ k \epsilon Z$

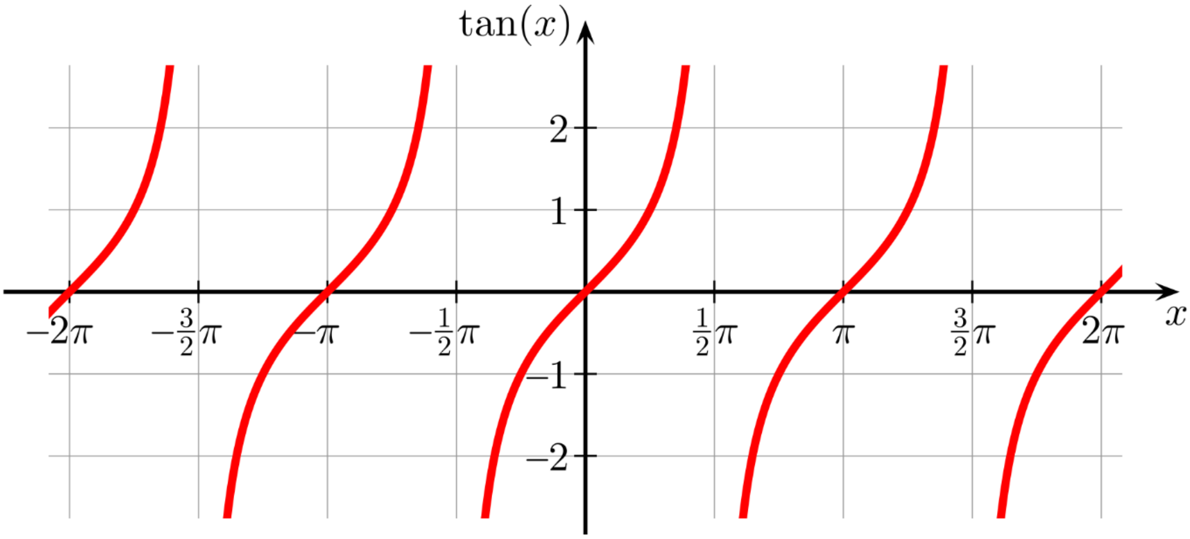
$W(\tan x) = \mathbb{R}$

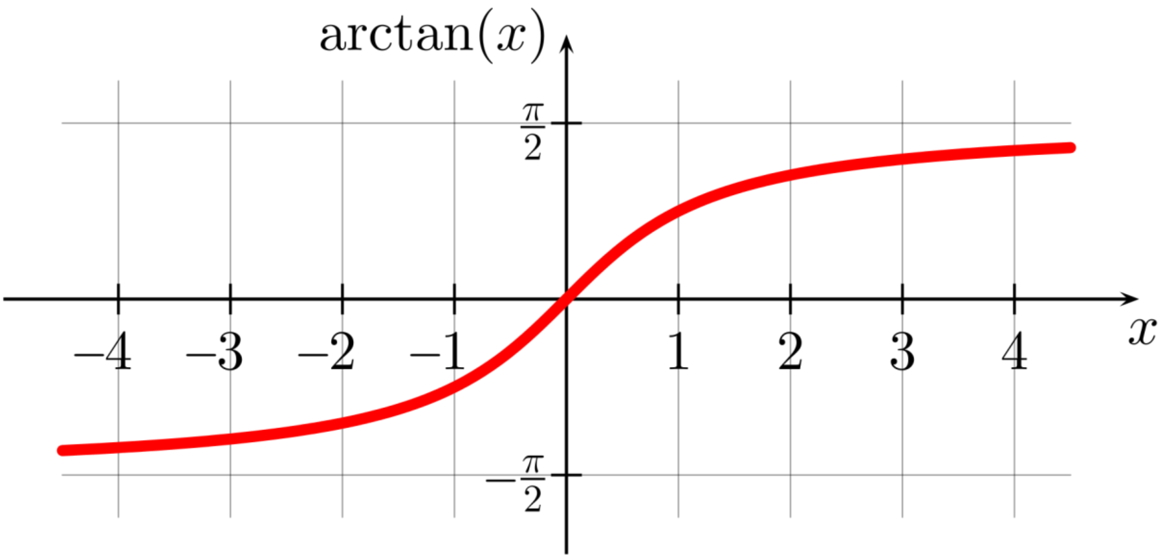
a)

$D(\arctan x) = \mathbb{R}$

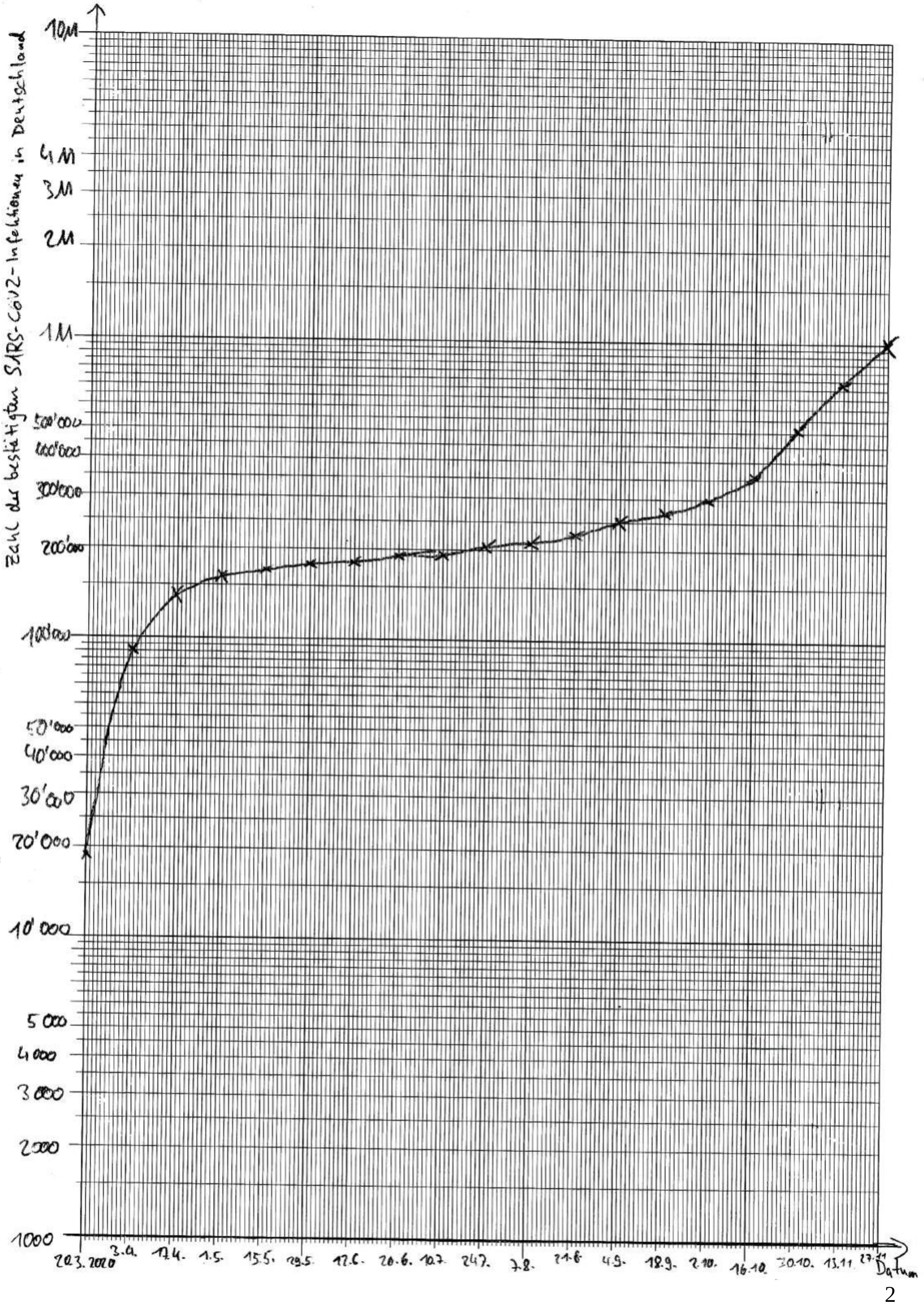
$W(\arctan x) =]\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$

b)





Aufgabe 5.2:


Zahl der bestätigten SARS-CoV2-Infektionen in Deutschland
10M
4M
3M
2M
1M
500'000
400'000
300'000
200'000
100'000
50'000
40'000
30'000
20'000
10'000
5 000
4 000
3 000
2 000
1000
20.3.2020
3.4.
17.4.
1.5.
15.5.
29.5.
12.6.
26.6.
10.7.
24.7.
7.8.
21.8.
4.9.
18.9.
2.10.
16.10.
30.10.
13.11.
27.11.
Datum

Aufgabe 5.3:

a)
$f(x) = e^x \cdot (x^2 - 1)$
Produktregel: $(u \cdot v)'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$
$u(x) = e^x,\ v'(x) = e^x$
$v(x) = x^2 - 1,\ v'(x) = 2x$
Ableitung:
$f'(x) = e^x \cdot (x^2 - 1) + e^x \cdot 2x = e^x(x^2 + 2x - 1)$

b)
$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2}$$
Quotientenregel: $\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x)g(x) - u(x)g'(x)}{v(x)^2}$
$u(x) = \ln(x)\,,\ u'(x) = \frac{1}{x}$
$v(x) = x^2,\ v'(x) = 2x$
Ableitung:
$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x^2 - \ln(x) \cdot 2x}{(x^2)^2} = \frac{1 - 2 \cdot \ln(x)}{x^3}$$

c)
$f(x) = \arcsin(x)$
Ableitung der Umkehrfunktion: $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y_0)\right)}$
$f(x) = \sin x\,, \quad f'(x) = \cos x$
$f^{-1}(y_0) = \arcsin x$
Allgemeine Ableitung:
$$(f^{-1})'(y_0) = (\arcsin y_0)' = \frac{1}{\cos(\arcsin y_0)}$$

Mit folgender Überlegung
$$\begin{aligned} \sin^2 x + \cos^2 x &= 1 \\ \cos^2 x &= 1 - \sin^2 x \\ \cos x &= \sqrt{1 - \sin^2 x} \end{aligned}$$
ergibt sich:
$$\frac{1}{\cos(\arcsin y_0)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin y_0)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y_0^2}}$$

Ableitung:
$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

d)

$$f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

Quotientenregel: $\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x)g(x) - u(x)g'(x)}{v(x)^2}$

$u(x) = \sin x\,,\ u'(x) = \cos x$

$v(x) = \cos x\,,\ v'(x) = -\sin x$

Ableitung:

$$f'(x) = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{(\cos x)^2} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

(siehe 5.3c))

e)

$$f(x) = \ln(\ln(x))$$

Kettenregel: $\big(g\big(h(x)\big)\big)' = g'\big(h(x)\big)h'(x)$

$g(h) = \ln(h) \qquad g'(h) = \frac{1}{h}$

$h(x) = \ln(x) \qquad h'(x) = \frac{1}{x}$

Ableitung

$$f'(x) = \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \ln x}$$

f)

$$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$$

Ableitung:

$$f'(x) = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

g)

$$f(x) = \sqrt{1 + \sqrt{x}}$$

Kettenregel: $\big(g\big(h(x)\big)\big)' = g'\big(h(x)\big)h'(x)$

$g(h) = \sqrt{h} \qquad g'(h) = -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{h}}$

$h(x) = 1 + \sqrt{x} \qquad h'(x) = -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}$

Ableitung

$$f'^{(x)} = -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{x}}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = -\frac{1}{4\sqrt{x} \cdot \sqrt{1+\sqrt{x}}}$$

g)
$f(x) = \log_{10} x$
Basiswechsel mit Logarithmus-Gesetz: $\log_c x = \log_c b \cdot \log_b x$
Angewandt auf $\log_{10} x$: $\log_{10} x = \log_{10} e \cdot \log_{\mathrm{e}} x = \log_{10} e \cdot \ln x$
Für $f(x)$ ergibt sich: $f(x) = \log_{10} e \cdot \ln x$

Ableitung:
$$f'(x) = \frac{\log_{10} e}{x} = \log_{10} e \cdot x^{-1}$$