

Mathematik für Naturwissenschaftler

Musterlösung Blatt 4

Aufgabe 4.1

Für imaginäre Zahlen gelten folgende Darstellungen:

$$z = a + i \cdot b = r \cdot e^{i \cdot \phi} = r \cdot (\cos(\phi) + i \cdot \sin(\phi))$$

(a) $z = -2$

Es gilt $|z| = r$. Also $r = 2$.

$$z = 2 \cdot e^{i \cdot \phi} = -2 \Leftrightarrow e^{i \cdot \phi} = -1 = \cos(\phi) + i \cdot \sin(\phi)$$

Vergleich von Real- und Imaginärteil liefert:

$$\cos(\phi) = -1 \Rightarrow \phi = \pi$$

$$\sin(\phi) = 0 \Rightarrow \phi = 0 \text{ oder } \phi = \pi$$

$$\Rightarrow \phi = \pi$$

$$\Rightarrow z = 2 \cdot e^{i \cdot \pi}$$

(b) $z = -1 - i$

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$z = \sqrt{2} \cdot e^{i \cdot \phi} = \sqrt{2}(\cos(\phi) + i \cdot \sin(\phi)) = \sqrt{2} \cdot \cos(\phi) + \sqrt{2} \cdot i \cdot \sin(\phi) = -1 - i$$

Vergleich von Real- und Imaginärteil liefert:

$$\operatorname{Re}(z) = \sqrt{2} \cdot \cos(\phi) = -1 \Rightarrow \cos(\phi) = \frac{-1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \phi = \pm \frac{3}{4} \cdot \pi$$

$$\operatorname{Im}(z) = \sqrt{2} \cdot \sin(\phi) = -1 \Rightarrow \sin(\phi) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \phi = -\frac{\pi}{4} \text{ oder } \phi = -\frac{3}{4} \cdot \pi$$

$$\Rightarrow \phi = -\frac{3}{4} \cdot \pi$$

$$z = \sqrt{2} \cdot e^{-i \cdot \frac{3}{4} \cdot \pi}$$

(c) $r = 3, \phi = \pi$

$$\operatorname{Re}(z) = r \cdot \cos(\pi) = a \Rightarrow a = -3$$

$$\operatorname{Im}(z) = r \cdot \sin(\pi) = b \Rightarrow b = 0$$

$$\Rightarrow z = 3 \cdot e^{i \cdot \pi} = -3$$

(d) $r = 2, \phi = -\frac{\pi}{2}$

$$\operatorname{Re}(z) = r \cdot \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = a \Rightarrow a = 0$$

$$\operatorname{Im}(z) = r \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = b \Rightarrow b = -2$$

$$\Rightarrow z = 2 \cdot e^{i \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right)} = -2 \cdot i$$

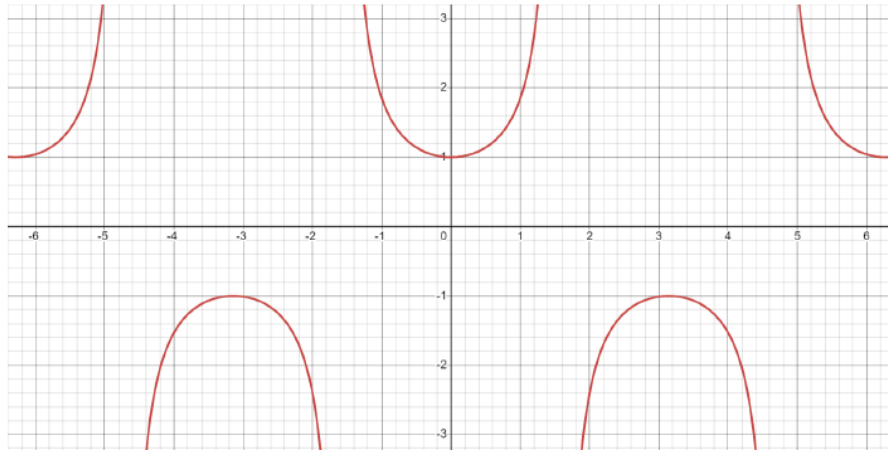
Aufgabe 4.2

a) Siehe Aufgabe 3.3 d)

(d) $f(x) = \frac{1}{\cos(x)}$

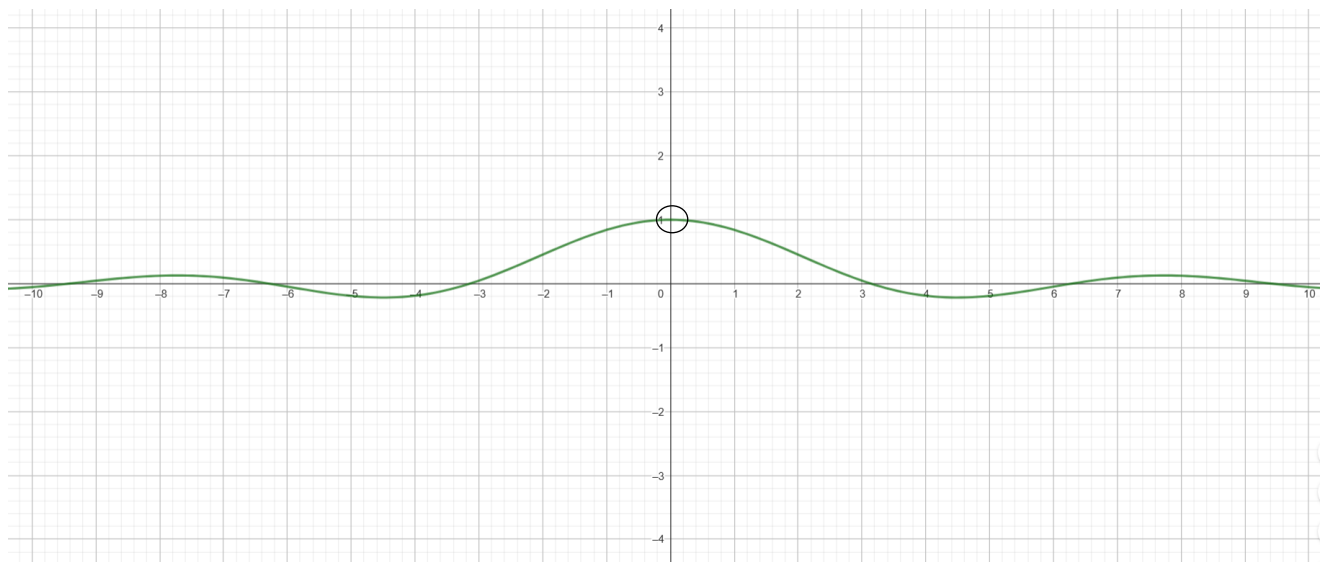
Die $\cos$ -Funktion selbst hat $\mathbb{R}$ als Definitionsbereich und als Wertebereich $[-1, 1]$. Da aber $\cos(x)$ im Nenner steht, darf dieser nicht null werden. Somit werden für den Definitionsbereich von $f(x)$ alle Werte x ausgeschlossen die zu $\cos(x) = 0$ führen.

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z} \right\}, \quad W(f) = \mathbb{R} \setminus (-1, 1)$$



b) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$

Man darf nicht durch 0 dividieren, daher ist $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

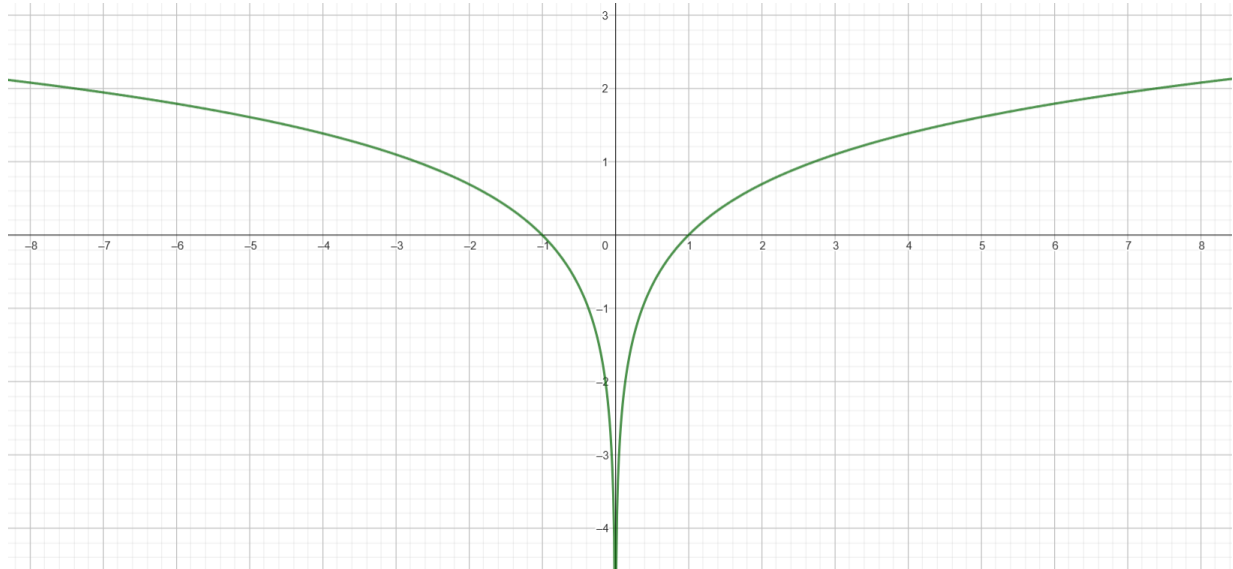


Darstellung mit Kreis verdeutlicht Lücke im Definitionsbereich, da links- und rechtsseitiger Grenzwert übereinstimmen.

c) $f(x) = \ln |x|$

Man kann keinen natürlichen Logarithmus von 0 oder negativen Zahlen (Betragsstriche ermöglichen es) bilden,

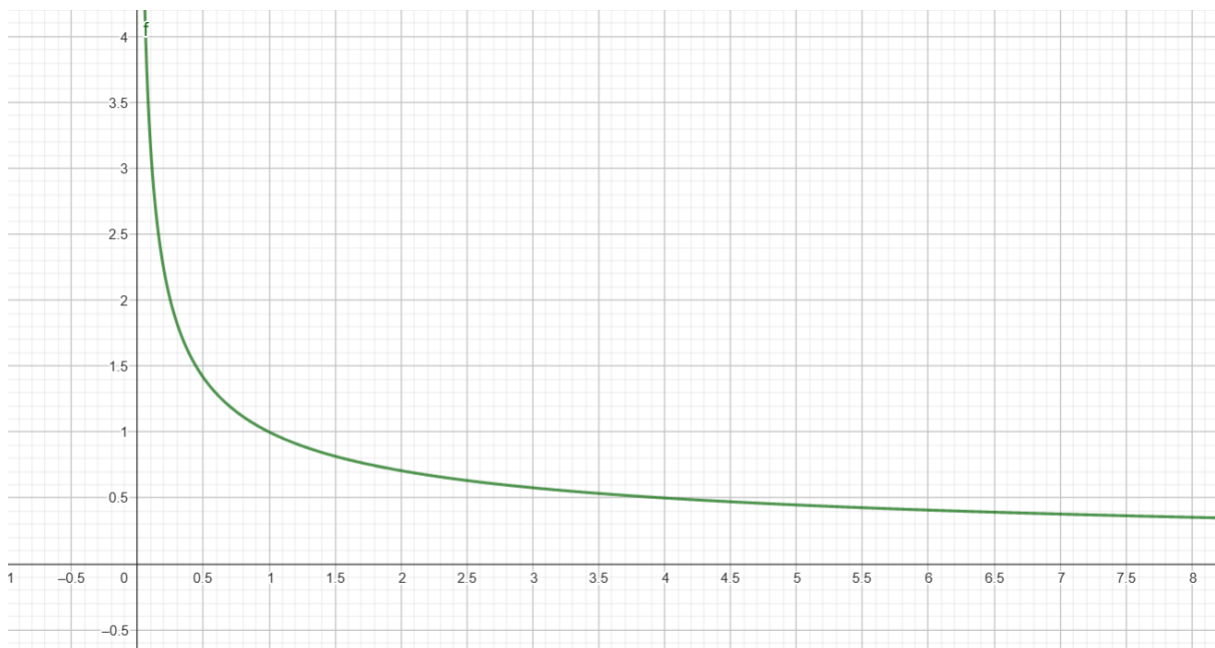
daher ist $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$



d) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

Man darf keine Wurzel aus negativen Zahlen ziehen und nicht durch 0 dividieren,

daher ist $D(f) = \mathbb{R}^+$



Aufgabe 4.3

(a) Im gesamten Definitionsbereich stetig, da $] -\infty, 0]$ ausgeschlossen.

(b)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{falls } x \geq 0 \\ 1 - x, & \text{falls } x < 0 \end{cases} \quad \text{mit } D(f) = \mathbb{R}$$

Die Fälle einzeln sind offensichtlich stetig. Es muss noch der Verknüpfungspunkt ($x = 0$) der beiden Funktionsvorschriften untersucht werden:

$$\text{für } x \geq 0: \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + 1) = 1$$

$$\text{für } x < 0: \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} (1 - x) = 1$$

Da die linke Seite und rechte Seite des Grenzwertes übereinstimmt, ist die Funktion am Punkt $x = 0$ stetig und somit über ganz $\mathbb{R}$.

(c)

$$f(z) = \frac{1}{1 + z^2} \quad \text{mit } D(f) = \mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$$

Da $\{\pm i\}$ nicht im Definitionsbereich liegt, ist $f(z)$ im gesamten Definitionsbereich stetig.

(d)

$$f(z) = \begin{cases} \frac{z^2+1}{z}, & \text{falls } z \neq 0 \\ 0, & \text{falls } z = 0 \end{cases} \quad \text{mit } D(f) = \mathbb{C}$$

Die Fälle einzeln sind stetig. Es muss noch der Verknüpfungspunkt ($z = 0$) der beiden Funktionsvorschriften verglichen werden:

$$\text{für } z \neq 0: \quad \lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{z^2 + 1}{z} \right) = \infty$$

$$\text{für } z = 0: \quad \lim_{z \rightarrow 0} 0 = 0$$

Die beiden Werte stimmen nicht überein, somit ist die Funktion am Punkt $x = 0$ unstetig.