Mathematik für Naturwissenschaftler I
Musterlösung Blatt 2

Aufgabe 2.1:

a)

$$\frac{1}{1+|x|} \geq \frac{2}{3}$$

Fall 1: $x \geq 0 \quad \Rightarrow |x| = x$

also ist

$$\frac{1}{1+|x|} = \frac{1}{1+x}$$

und damit

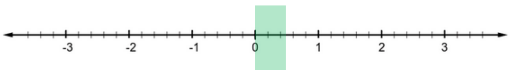
$$\frac{1}{1+x} \geq \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{3}{2} \geq 1 + x$$

$$\Leftrightarrow \quad x \leq \frac{1}{2}$$

$\frac{1}{1+|x|} \geq \frac{2}{3}$ gilt also für $x \leq \frac{1}{2}$, falls $x \geq 0$

$\mathbf{0 \leq x \leq \frac{1}{2}}$



Fall 2: $x < 0 \quad \Rightarrow |x| = -x$

also ist

$$\frac{1}{1+|x|} = \frac{1}{1+(-x)}$$

und damit

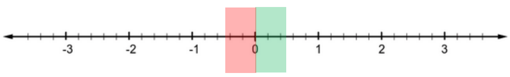
$$\frac{1}{1-x} \geq \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{3}{2} \geq 1 - x$$

$$\Leftrightarrow \quad x \geq -\frac{1}{2}$$

$\frac{1}{1+|x|} \geq \frac{2}{3}$ gilt also für $x \geq -\frac{1}{2}$, falls $x < 0$

$\mathbf{-\frac{1}{2} \leq x \leq 0}$



Es ergibt sich insgesamt:

$\frac{1}{1+|x|} \geq \frac{2}{3}$ gilt für $\mathbf{-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}}$

b)

$$\frac{1-|x-1|}{x-1} < 1$$

Fall 1: $x - 1 \geq 0 \quad \Leftrightarrow x \geq 1 \quad \Rightarrow |x-1| = x-1$

also ist

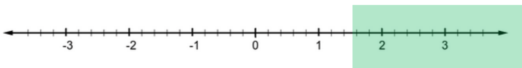
$$\frac{1-|x-1|}{x-1} = \frac{1-(x-1)}{x-1} = \frac{1-x+1}{x-1}$$

und damit

$$\begin{aligned} & \frac{1-x+1}{x-1} < 1 \\ \Leftrightarrow \quad & 1-x+1 < x-1 \\ \Leftrightarrow \quad & 2x > 3 \\ \Leftrightarrow \quad & x > \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$\frac{1-|x-1|}{x-1} < 1$ gilt also für $x > \frac{3}{2}$, falls $x \geq 1$

$\boldsymbol{\frac{3}{2} < x}$



Fall 2: $x - 1 < 0 \quad \Leftrightarrow x < 1 \quad \Rightarrow |x-1| = -(x-1)$

also ist

$$\frac{1-|x-1|}{x-1} = \frac{1-\left(-(x-1)\right)}{x-1} = \frac{1+x-1}{x-1}$$

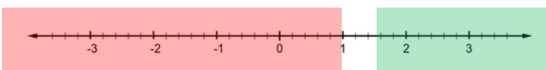
und damit

$$\begin{aligned} & \frac{1+x-1}{x-1} < 1 \qquad && | \cdot (x-1) \\ \Leftrightarrow \quad & 1+x-1 > x-1 \\ \Leftrightarrow \quad & 0 > -1 && \text{gilt immer} \end{aligned}$$

da $(x-1) < 0$ ist, muss das Ungleichheitszeichen umgedreht werden

$\frac{1-|x-1|}{x-1} < 1$ gilt immer, falls $x < 1$

$\boldsymbol{x < 1}$



Es ergibt sich insgesamt:

$$\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1, \quad \text{oder} \quad x > \frac{3}{2}\}$$

Aufgabe 2.2:

a)

$$\left(\frac{2n-1}{n}\right) = a_n = \left(2 - \frac{1}{n}\right)$$

Untersuchung $b_n = \left(\frac{1}{n}\right)$ auf Monotonie:

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}} = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n} > 1$$

da $\frac{b_n}{b_{n+1}} > 1$ streng monoton fallend ist, ist a_n **streng monoton wachsend**.

---

b)

$$\left((-1)^n \left(\frac{2n+1}{n^2}\right)\right) = a_n$$

da $(-1)^n$ alterniert, ist auch die gesamte Folge a_n **nicht monoton**.

---

c)

$$(2 - 2^{-n}) = a_n$$

Untersuchung von $b_n = 2^{-n}$ auf Monotonie:

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{2^{-(n+1)}}{2^{-n}} = \frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{2^n}{2^n \cdot 2} = \frac{1}{2} < 1$$

$b_n = 2^{-n}$ ist streng monoton fallend. Daher ist $a_n = (2 - b_n)$ **streng monoton wachsend**.

---

d)

$$\left(\frac{n^2-1}{n+1}\right) = a_n = \left(\frac{\cancel{(n+1)} \cdot (n-1)}{\cancel{n+1}}\right) = (n-1)$$

Untersuchung auf Monotonie:

$$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = \frac{(n+2)-1}{(n+1)-1} = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n} > 1$$

a_n ist damit streng monoton wachsend.

Aufgabe 2.3:

i)

$$\left(\frac{2n-1}{n}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n-1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{n}-\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{1}{n}\right) = 2-0 = 2$$

Die Folge a_n **konvergiert**. Der Grenzwert beträgt **2**.

---

ii)

$$\left((-1)^n\left(\frac{2n+1}{n^2}\right)\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}\left((-1)^n\left(\frac{2n+1}{n^2}\right)\right) = \lim_{n\to\infty}((-1)^n) \cdot \lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{2n+1}{n^2}\right)\right) = \pm 1 \cdot \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right) = \pm 1 \cdot 0$$
$$= 0$$

Die Folge a_n **konvergiert**. Der Grenzwert beträgt **0**.

---

iii)

$$(2-2^{-n}) = a_n$$

$$\lim_{n\to\infty}(2-2^{-n}) = \lim_{n\to\infty}(2) - \lim_{n\to\infty}(2^{-n}) = 2 - \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2^n}\right) = 2-0 = 2$$

Die Folge a_n **konvergiert**. Der Grenzwert beträgt **2**.

---

iv)

$$\left(\frac{n^2-1}{n+1}\right) = a_n = (n-1)\ (siehe\ 3.2d))$$

$$\lim_{n\to\infty}(n-1) = +\infty - 1 = +\infty$$

Die Folge **divergiert**.