

Mathematik für Naturwissenschaftler

Musterlösung Blatt 1

Aufgabe 1.1

a)

i) Es gilt die dritte binomische Formel: $x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$

$$\rightarrow \frac{1}{x-1} - \frac{1+x}{x^2-1} = \frac{1}{x-1} - \frac{x+1}{(x+1)(x-1)} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-1} = 0$$

ii)

$$\frac{\frac{1-a^2}{a-1}}{\frac{(1-a)^2}{a-1}} = \frac{(1-a^2) \cdot (a-1)}{(1-a)^2 \cdot (a-1)} = \frac{(1-a^2)}{(1-a)^2} = \frac{(1-a)(1+a)}{(1-a)(1-a)} = \frac{1+a}{1-a}$$

b)

i)

$$\frac{(3^{-3})^3}{(-9)^{-5}} = \frac{3^{-9}}{(-1 \cdot 3^2)^{-5}} = \frac{3^{-9}}{(-1)^{-5} \cdot 3^{-10}} = (-1)^5 \cdot 3 = -3$$

ii)

$$\log_3 \frac{1}{3} + \log_5 \sqrt{5} = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

iii)

$$\frac{a^{n-1}b^{1-n}}{a^{-n}b^n} = \frac{a^na^nb^1}{a^1b^nb^n} = a^{2n-1}b^{-2n+1}$$

iv)

$$\log_2 8 \log_8 2 = \frac{\log_{10} 8}{\log_{10} 2} \cdot \frac{\log_{10} 2}{\log_{10} 8} = 1$$

Aufgabe 1.2

a) $1 + i^2 = 1 + (-1) = 0$

b) $(-i)^2 = ((-1) \cdot i)^2 = (-1)^2 \cdot i^2 = -1$

c) $(i)^3 = (i)^2 \cdot i = (-1) \cdot i = -i$

d) Der Bruch kann mit $1 = \frac{-i}{-i}$ erweitert werden:

$$\frac{1}{i} = \frac{1}{i} \cdot \frac{-i}{-i} = \frac{-i}{i \cdot (-i)} = \frac{-i}{1} = -i$$

$$e) \quad \frac{2i}{-2+2i} = \frac{i}{-1+i} = \frac{i \cdot (-1-i)}{(-1+i) \cdot (-1-i)} = \frac{1-i}{1-i^2} = \frac{1-i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$f) \quad \frac{8-i}{3-2i} \cdot \frac{3+2i}{3+2i} = \frac{(8-i) \cdot (3+2i)}{(3-2i) \cdot (3+2i)} = \frac{24-3i+16i+2}{9+4} = \frac{26+13i}{13} = 2 + i$$

$$g) \quad (2+i)(2-i) = 4 + 2i - 2i - i^2 = 4 + 1 = 5$$

$$h) \quad 2i - (1+i)(2-3i) - 2 = 2i - (2 + 2i - 3i + 3) - 2 = 2i - 5 + i - 2 = -7 + 3i$$

Aufgabe 1.3

$$a) \quad pH_{H_2O} = -\log_{10}[H^+] = 7$$

$$\Leftrightarrow \log_{10}[H^+] = -7$$

$$\Leftrightarrow [H_{H_2O}^+] = 10^{-7} \frac{\text{mol}}{\text{l}}$$

Reines Wasser hat eine Protonenkonzentration von $[H_{H_2O}^+] = 10^{-7} \frac{\text{mol}}{\text{l}}$.

b)

$$[H^+]_1 = 10^{-7.5} \frac{\text{mol}}{\text{l}}$$

$$\Leftrightarrow pH_1 = -\log_{10}[10^{-7.5}] = 7.5$$

$$[H^+]_2 = 10^{-7.3} \frac{\text{mol}}{\text{l}}$$

$$\Leftrightarrow pH_1 = -\log_{10}[10^{-7.3}] = 7.3$$

$$\rightarrow 7.3 \leq pH_{Blut} \leq 7.5$$

Der pH-Wert von Blut liegt zwischen 7.3 und 7.5. Somit ist Blut alkalisch.