4. Formelblatt

4.1 (Majorantenkriterium) Sei $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergent mit $b_k \geq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$.
Gilt $|a_k| \leq b_k$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$, so konvergiert auch $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$.

4.2 (Minorantenkriterium) Sei $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ divergent mit $b_k \geq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$.
Gilt $a_k \geq b_k$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$, so divergiert auch $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$.

4.3 (Quotienten-/Wurzelkriterium) Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ mit $a_k \neq 0$ konvergiert, wenn $\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < 1$ und divergiert, wenn $\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| > 1$.
Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert, wenn $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} < 1$ und divergiert, wenn $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} > 1$.

4.4 (Leibniz-Kriterium) Eine *alternierende Reihe* $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$ mit $a_k \geq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ konvergiert, wenn (a_k) monoton fällt und $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$.

4.5 Für jede Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ gibt es einen Wert $R \geq 0$ oder $R = \infty$ (*Konvergenzradius*), so dass die Reihe konvergiert, wenn $|x-x_0| < R$ und divergiert, wenn $|x-x_0| > R$. Es gilt $R = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|$ und $R = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}}$, sofern diese Grenzwerte existieren.

4.6 (gliedweise Differenziation und Integration) Sei $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ mit $R > 0$. Dann gilt im gleichen Konvergenzbereich:
f ist differenzierbar mit $f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left((x-x_0)^k\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} a_k k (x-x_0)^{k-1}$.
f hat Stammfunktionen $\int f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \int (x-x_0)^k\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1}(x-x_0)^{k+1} + C$.

4.7 Sei $n \in \mathbb{N}_0$ und f in $[a,b]$ n-mal differenzierbar und sei $x_0 \in [a,b]$. Dann heißt $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ *n-tes Taylor-Polynom* mit *Entwicklungspunkt* x_0 von f.

4.8 (Taylor-Reihen-Entwicklung) Sei f in $[a,b]$ beliebig oft differenzierbar und sei $x_0 \in]a,b[$. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ heißt *Taylor-Reihe* von f mit Entwicklungspunkt x_0.

4.9 Sei b reell und n eine natürliche Zahl. Für $x \neq b$ gilt $\int \frac{1}{x-b}\,dx = \ln|x-b| + C$ und $\int \frac{1}{(x-b)^n}\,dx = \frac{1}{(1-n)(x-b)^{n-1}} + C$ für $n \geq 2$.