# 3. Formelblatt

**3.1** Sei $f$ eine in $[a,b]$ beschränkte Funktion (d.h. $|f(x)| \le C$ für alle $x \in [a,b]$). Konvergieren die *Riemann-Summen* $I_Z = \sum\limits_{i=1}^{\infty} f(z_i)(x_i - x_{i-1})$ für alle Zerlegungen $Z : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ und jede Wahl von Stützstellen $z_i \in [x_{i-1}, x_i]$ gegen einen Grenzwert $I = \int_a^b f(x)\,dx$, so heißt $f$ *integrierbar* in $[a,b]$.
Weiter sei $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$ und $\int_a^a f(x)\,dx = 0$.

**3.2** Jede in $[a,b]$ monotone und beschränkte Funktion ist in $[a,b]$ integrierbar.

**3.3** Jede in $[a,b]$ stetige Funktion ist in $[a,b]$ integrierbar.

**3.4** Sei $f$ in $[a,b]$ definiert. Eine Funktion $F$ heißt *Stammfunktion* von $f$, wenn $F'(x) = f(x)$ in $[a,b]$. Ist $f$ in $[a,b]$ stetig, so ist $\varphi(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ differenzierbar und eine Stammfunktion von $f$.

**3.5 (Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung)** Sei $f$ in $[a,b]$ stetig und $F$ eine Stammfunktion von $f$. Dann gilt $\int_a^b f(t)\,dt = F(t)\big|_a^b = F(b) - F(a)$.

**3.6**

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x) =$ | $c$ | $x^a$ | $\frac{1}{x}$ | $e^x$ | $\ln x$ | $\sin x$ | $\cos x$ | $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | |
| $F(x) =$ | $cx$ | $\frac{x^{a+1}}{a+1}$ | $\ln\|x\|$ | $e^x$ | $x \ln x - x$ | $-\cos x$ | $\sin x$ | $\arcsin x$ | $-\arccos x$ |

**3.7** Sei $f(x) \neq 0$ und $f'(x)$ stetig in $[a,b]$. Dann gilt $\int_a^b \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)|\big|_a^b$.

**3.8 (partielle Integration)** Seien $f$ und $g$ differenzierbar in $[a,b]$ mit stetigen Ableitungen $f'$ und $g'$. Dann gilt $\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x)\big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx$.

**3.9 (Substitutionsregel)** Sei $f(x)$ stetig in $[a,b]$ und $x(t)$ mit $x(\alpha) = a$, $x(\beta) = b$ und $x(t) \in [a,b]$ für $t \in [\alpha,\beta]$ habe in $[\alpha,\beta]$ eine stetige Ableitung. Dann gilt $\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(x(t))\,x'(t)\,dt$.

**3.10 (uneigentliche Integrale)** Sei $f$ in jedem Intervall $[a,b]$ mit $b < B$ bzw. $A < a$ integrierbar. $f$ heißt *uneigentlich integrierbar*, wenn der entsprechende Grenzwert existiert:
$\lim\limits_{b\to B} \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^B f(x)\,dx$ bzw. $\lim\limits_{a\to A} \int_a^b f(x)\,dx = \int_A^b f(x)\,dx$
$\lim\limits_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^\infty f(x)\,dx$ bzw. $\lim\limits_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)\,dx = \int_{-\infty}^b f(x)\,dx$
Ist $f$ für ein $c \in \mathbb{R}$ sowohl in $]-\infty, c]$, als auch in $[c, \infty[$ uneigentlich integrierbar, so ist $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \int_{-\infty}^c f(x)\,dx + \int_c^\infty f(x)\,dx$.

**3.11** Die Folge $(s_n)$ mit $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ ist die mit der Folge $(a_k)$ gebildete *Reihe* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$. Sie heißt *konvergent* zur Summe $S$, wenn $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = \lim\limits_{n\to\infty} s_n = S$ existiert, sonst *divergent*.

**3.12** Konvergiert $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, so gilt $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$.
Die Umkehrung gilt nicht: Die *harmonische Reihe* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergiert, obwohl $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0$.

**3.13** Die *geometrische Reihe* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} z^k$ divergiert für $|z| \ge 1$ und konvergiert für $|z| < 1$ gegen den Grenzwert $\frac{1}{1-z}$.