# 2. Formelblatt

**2.1** Eine Funktion $f$ *konvergiert* in $a$ gegen einen Grenzwert $g$, d.h. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = g$, wenn für *jede* Folge $(a_n)$ mit $a_n \in D(f)$, $a_n \neq a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = g$.

**2.2** Eine Funktion $f$ ist in $a \in D(f)$ *stetig*, wenn $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

**2.3** Eine Funktion $f$ heißt *differenzierbar* in $a \in D(f)$, wenn der Grenzwert $f'(a) = \dfrac{d}{dx} f(a) = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existiert. $f'$ heißt *Ableitung* von $f$.
Ist eine Funktion in $x$ differenzierbar, so ist sie dort auch stetig.

**2.4**

| $f(x) =$ | $c$ | $ax+b$ | $x^a$ | $\sqrt{x}$ | $\sin x$ | $\cos x$ | $e^x$ | $\ln x$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x) =$ | $0$ | $a$ | $ax^{a-1}$ | $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ | $\cos x$ | $-\sin x$ | $e^x$ | $\frac{1}{x}$ |

**2.5** Seien $f$ und $g$ in $x$ differenzierbar. Dann sind auch die folgenden Funktionen in $x$ differenzierbar und es gilt:

$$(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x) \qquad \textbf{(Summenregel)}$$
$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \qquad \textbf{(Produktregel)}$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2} \qquad \text{für } g(x) \neq 0 \qquad \textbf{(Quotientenregel)}$$

**2.6 (Kettenregel)** Sei $h$ differenzierbar in $x$ und $g$ differenzierbar in $h(x)$. Dann ist die Funktion $f(x) = g(h(x))$ differenzierbar in $x$ mit $f'(x) = g'(h(x))h'(x)$.

**2.7 (Ableitung der Umkehrfunktion)** Sei $y = f(x)$ stetig und streng monoton auf $[a,b]$ und sei $f$ differenzierbar in $a < x_0 < b$ mit $f'(x_0) \neq 0$. Dann ist die Umkehrfunktion $x = f^{-1}(y)$ differenzierbar in $y_0 = f(x_0)$ mit $\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$.

**2.8 (logarithmische Differenziation)** Seien $f$ und $g$ differenzierbar auf $]a,b[$ mit $f(x) > 0$ für $x \in ]a,b[$. Dann ist $\left(f(x)^{g(x)}\right)' = f(x)^{g(x)} \left(g(x) \cdot \ln f(x)\right)'$.

**2.9 (Extrema)** Sei $f$ in $]a,b[$ $n$-mal differenzierbar mit $n \geq 2$. Für $x_0 \in ]a,b[$ sei $f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ aber $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Es gilt:

(a) Ist $n$ gerade und $f^{(n)}(x_0) < 0$, so hat $f$ in $x_0$ ein lokales Maximum.

(b) Ist $n$ gerade und $f^{(n)}(x_0) > 0$, so hat $f$ in $x_0$ ein lokales Minimum.

(c) Ist $n$ ungerade, so hat $f$ in $x_0$ kein Extremum.

**2.10 (Regel von de l'Hospital, Typ $\frac{0}{0}$)** Seien $f$ und $g$ in $]a,b[\setminus\{x_0\}$ differenzierbare Funktionen mit $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in ]a,b[\setminus\{x_0\}$. Gilt $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ und existiert $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, so existiert auch $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$. (Analog für $x_0 = \pm\infty$.)

**2.11 (Regel von de l'Hospital, Typ $\frac{\infty}{\infty}$)** Seien $f$ und $g$ in $]a,b[\setminus\{x_0\}$ differenzierbare Funktionen mit $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in ]a,b[\setminus\{x_0\}$. Gilt $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$ und existiert $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, so existiert auch $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$. (Analog für $x_0 = \pm\infty$.)