

1. Formelblatt

$$1.1 \quad a^x a^y = a^{x+y} \quad a^x b^x = (ab)^x \quad a^{xy} = (a^x)^y \quad a^{-x} = \frac{1}{a^x} \quad \sqrt[q]{a} = a^{\frac{1}{q}}$$

$$1.2 \quad \log_b(xy) = \log_b x + \log_b y \quad \log_b x^y = y \log_b x \quad \log_c x = \log_c b \cdot \log_b x$$

$$1.3 \quad (\textbf{Komplexe Zahlen } \mathbb{C}) \quad (\text{a}) \quad \textit{Imaginäre Einheit: } i^2 = -1$$

$$(\text{b}) \quad (x + iy) + (a + ib) = (x + a) + i(y + b) \quad , \quad (x + iy) - (a + ib) = (x - a) + i(y - b)$$

$$(\text{c}) \quad (x + iy)(a + ib) = (ax - yb) + i(bx + ay) \quad , \quad \frac{x + iy}{a + ib} = \frac{ax + by}{a^2 + b^2} + i \frac{ay - bx}{a^2 + b^2}$$

$$(\text{d}) \quad \textit{Betrag: Ist } z = x + iy \text{ , so ist } |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$(\text{e}) \quad \textit{konjugiert komplexe Zahl: } \overline{x + iy} = x - iy. \text{ Es gilt z.B. } z \cdot \bar{z} = |z|^2$$

$$1.4 \quad (\textbf{Geometrische Summe}) \quad \text{Für } x \neq 1 \text{ und } n \in \mathbb{N}_0 \text{ gilt } \sum_{i=0}^n x^i = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} .$$

$$1.5 \quad \text{Für } n \in \mathbb{N} \text{ sei } n! = 1 \cdot 2 \cdots n \text{ die Fakultät von } n. \text{ Weiter sei } 0! = 1.$$

$$1.6 \quad (\textbf{Dreiecksungleichung}) \quad \text{Für alle } x, y \in \mathbb{R} \text{ gilt } |x + y| \leq |x| + |y|.$$

$$1.7 \quad (\textbf{Bernoullische Ungleichung}) \quad \text{Für } x \geq -1 \text{ und } n \in \mathbb{N} \text{ gilt } (1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

$$1.8 \quad \text{Eine Folge } (a_n) \text{ ist konvergent gegen den Grenzwert } a \text{ (} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \text{), wenn für alle } \varepsilon > 0 \text{ alle } a_n \text{ mit } n \geq n_0 \text{ in der } \varepsilon\text{-Umgebung } U_\varepsilon(a) = \{x : |a - x| < \varepsilon\} \text{ liegen.}$$

Eine Folge heißt *divergent*, wenn sie nicht konvergiert.

$$1.9 \quad \text{Eine unbeschränkte Folge ist divergent.}$$

$$1.10 \quad (\textbf{Monotonieprinzip}) \quad \text{Ist eine Folge monoton und beschränkt, so ist sie konvergent.}$$

$$1.11 \quad \text{Der Wert } e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2.71828182845904 \dots \text{ heißt } \textit{Eulersche Zahl}.$$

$$1.12 \quad \begin{array}{lll} \sin(-x) = -\sin x & \sin(x \pm 2\pi) = \sin x & \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \\ \cos(-x) = \cos x & \cos(x \pm 2\pi) = \cos x & \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \end{array}$$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1

$$1.13 \quad \text{Sei } z = x + iy \in \mathbb{C}. \text{ Es ist } e^z = e^x(\cos y + i \sin y).$$

$$1.14 \quad z = x + iy \in \mathbb{C} \text{ hat die Polarkoordinaten } r \text{ und } \varphi \in]-\pi, \pi] \text{ mit } x = r \cos \varphi \text{ und } y = r \sin \varphi \text{ und es gilt } z = r e^{i\varphi} \text{ sowie } z^n = r^n e^{in\varphi} \text{ für } n \in \mathbb{Z}.$$

$$1.15 \quad e^{2\pi i} = 1, \text{ also } e^{z+2\pi i} = e^z, \text{ d.h. } f(z) = e^z \text{ ist periodisch mit der Periode } 2\pi i.$$