

Den Wert $\delta = \frac{\rho}{2m}$ nennt man *Abklingkonstante*.

Die Diskriminante dieser Differenzialgleichung ist $D = a_1^2 - 4a_2a_0 = \rho^2 - 4mk$. Hier können nun alle drei Fälle auftreten: $D > 0$, $D < 0$ und $D = 0$.

1. Fall $D > 0 \Leftrightarrow \rho^2 - 4mk > 0$. Mit $\delta = \frac{\rho}{2m} \Leftrightarrow \rho = 2\delta m$ folgt daraus

$$4\delta^2 m^2 - 4mk > 0 \Leftrightarrow \delta^2 m^2 > mk \Leftrightarrow \delta > \sqrt{\frac{k}{m}} = \omega_0 .$$

Es ist also $D > 0 \Leftrightarrow \delta > \omega_0$, die Abklingkonstante ist größer als die Winkelgeschwindigkeit. Man spricht in diesem Fall von einer *starken Dämpfung*.

Die Lösung der Schwingungsdifferentialgleichung ist nach Satz 4.1.6

$$s(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} ,$$

wobei

$$\lambda_{1,2} = -\frac{a_1 \pm \sqrt{D}}{2a_2} = -\frac{\rho \pm \sqrt{\rho^2 - 4mk}}{2m} = -\frac{\rho}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{\rho}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$$

Ein Beispiel für eine solche Funktion ist in Abbildung 24 dargestellt. Die starke Dämpfung sorgt dafür, dass das Pendel gar nicht hin- und her, sondern in die Ruhelage zurück-„schwingt“.

2. Fall $D < 0 \Leftrightarrow \delta < \omega_0$ (Diese Äquivalenz errechnet sich analog zum ersten Fall). Hier ist die Abklingkonstante kleiner als die Winkelgeschwindigkeit, dies ist eine *schwach gedämpfte* Schwingung.

$$\text{Hier ist } \lambda = -\frac{a_1}{2a_2} = -\frac{\rho}{2m} = -\delta \text{ und } \beta = \frac{\sqrt{-D}}{2a_2} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\rho^2}{4m^2}} = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} .$$

Mit $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ lautet die allgemeine Lösungsschar also

$$s(t) = e^{-\delta t} (c_1 \cos \omega_d t + c_2 \sin \omega_d t) .$$

Eine solche Funktion ist in Abbildung 25 dargestellt.

3. Fall Der Fall $D = 0 \Leftrightarrow \delta = \omega_0$ ist ein Grenzfall zwischen schwacher und starker Dämpfung. Wie im zweiten Fall ist $\lambda = -\frac{a_1}{2a_2} = -\frac{\rho}{2m} = -\delta$ und die Lösungen sind

$$s(t) = c_1 e^{-\delta t} + c_2 t e^{-\delta t} = (c_1 + c_2 t) e^{-\delta t} .$$

Abbildung 26 zeigt eine derartige Funktion.

4.4 Erzwungene Schwingungen

Betrachten wir wieder die Bewegung einer Masse, die an einer Feder auf und ab schwingen kann. Um die Sache noch ein wenig komplizierter zu machen, bewegen wir nun zusätzlich den Aufhängepunkt der Feder um die Strecke $a(t)$ nach oben oder unten aus der ursprünglichen Lage heraus.

Hierdurch wird die Feder gedehnt oder zusammengestaucht, es wirkt also eine zusätzliche Kraft, die proportional zu $a(t)$ ist:

$$k \cdot a(t) \quad \text{mit der Federkonstanten } k > 0 .$$

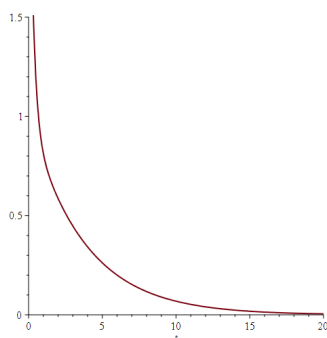


Abbildung 24: Schwingung mit starker Dämpfung

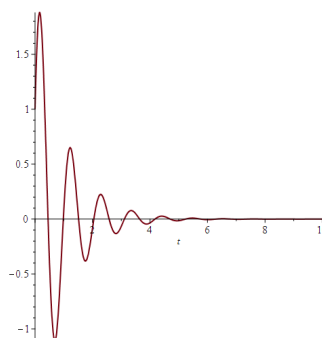


Abbildung 25: Schwingung mit schwacher Dämpfung

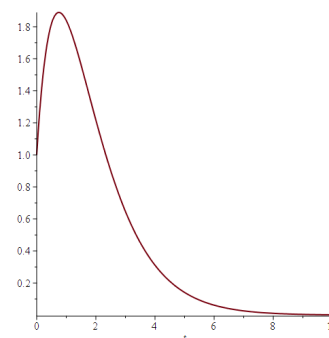


Abbildung 26: Grenzfall zwischen schwacher und starker Dämpfung

Außerdem wirkt auf die Masse auch die Federrückstellkraft $-ks(t)$ und die Dämpfung $-\rho s'(t)$, insgesamt also

$$-\rho s'(t) - ks(t) + ka(t) .$$

Dies ist nach dem Newtonschen Gesetz gleich $ms''(t)$, also

$$-\rho s' - ks + ka = ms'' \quad \Leftrightarrow \quad ms'' + \rho s' + ks = ka .$$

Wir haben also eine *inhomogene lineare Differenzialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten*. Solche Differenzialgleichungen sind im allgemeinen nur noch numerisch zu lösen. Wir vereinfachen das Gedankenexperiment daher wieder:

Nehmen wir an, es gäbe keine Dämpfung ($\rho = 0$) und der Aufhängepunkt bewege sich periodisch auf und ab:

$$a(t) = A \cdot \cos(\omega_A t) ,$$

mit maximaler Auslenkung A und Winkelgeschwindigkeit ω_A . Die beschreibende Differenzialgleichung lautet also, wenn wir wieder $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ schreiben,

$$\begin{aligned} ms'' + ks &= kA \cos(\omega_A t) \\ \Leftrightarrow s'' + \frac{k}{m}s &= \frac{k}{m}A \cos(\omega_A t) \\ \Leftrightarrow s'' + \omega_0^2 s &= \omega_0^2 A \cos(\omega_A t) . \end{aligned} \tag{14}$$

Um eine inhomogene lineare Differenzialgleichung wie diese zu lösen, müssen wir zuerst die Lösungsschar der zugehörigen homogenen linearen Differenzialgleichung $s'' + \omega_0^2 s = 0$ finden. Nach Satz 4.1.6 bilden wegen $D = -4\omega_0^2 < 0$ mit $\lambda = 0$ und $\beta = \frac{\sqrt{-D}}{2} = \omega_0$

$$f(t) = \cos(\omega_0 t) \quad \text{und} \quad g(t) = \sin(\omega_0 t)$$

ein Fundamentalsystem, die Lösungsschar ist also

$$s_{\text{hom}}(t) = c_1 \cos(\omega_0 t) + c_2 \sin(\omega_0 t) .$$

Um als nächstes eine partikuläre Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung zu finden, benutzen wir den sogenannten „Ansatz nach der rechten Seite“. Die Idee dabei ist, als partikuläre Lösung $s_{\text{part}}(t)$ eine Funktion auszuprobieren, die ähnlich aufgebaut ist, wie die rechte Seite der Differenzialgleichung.

Wir unterscheiden zwei Fälle:

1. Fall: $\omega_0 \neq \omega_A$

Als Lösungsansatz versuchen wir die Funktion

$$s_{\text{part}}(t) = C \cdot \cos(\omega_A t)$$

mit einem Faktor C , den wir noch zu bestimmen haben.

Setzen wir dies in (14) ein, erhalten wir

$$\begin{aligned} s_{\text{part}}''(t) + \omega_0^2 s_{\text{part}}(t) &= \omega_0^2 A \cos(\omega_A t) \\ \Leftrightarrow -C\omega_A^2 \cos(\omega_A t) + \omega_0^2 C \cos(\omega_A t) &= \omega_0^2 A \cos(\omega_A t) \\ \Leftrightarrow C(\omega_0^2 - \omega_A^2) &= \omega_0^2 A \\ \Leftrightarrow C &= \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega_A^2} \cdot A \end{aligned}$$

und folglich $s_{\text{part}}(t) = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega_A^2} A \cos(\omega_A t)$.

Die Lösungsschar der inhomogenen Differenzialgleichung (14) ist also

$$s(t) = c_1 \cos(\omega_0 t) + c_2 \sin(\omega_0 t) + \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega_A^2} A \cos(\omega_A t) .$$

Ein typischer Vertreter dieser Funktionen ist in Abbildung 27 dargestellt.

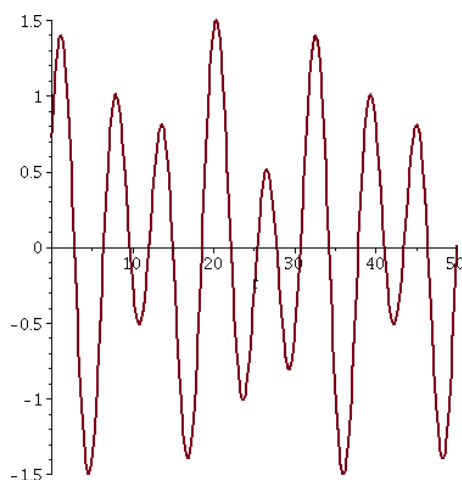


Abbildung 27: Erzwungene Schwingung mit $\omega_0 \neq \omega_A$

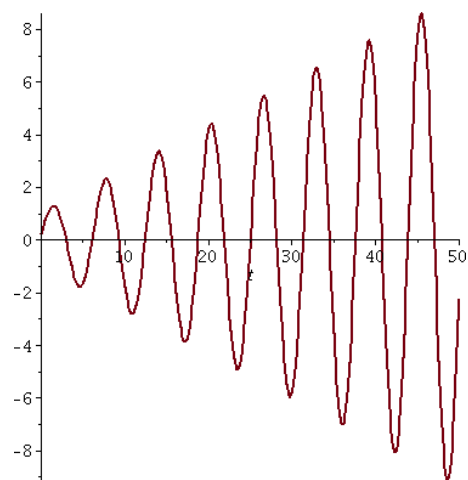


Abbildung 28: Resonanz bei erzwungener Schwingung mit $\omega_0 = \omega_A$

2. Fall: $\omega_0 = \omega_A$

Ist die Kreisfrequenz ω_0 der schwingenden Masse und die Kreisfrequenz ω_A der äußeren Anregung gleich, versuchen wir als Ansatz für eine partikuläre Lösung

$$s_{\text{part}}(t) = C \cdot t \cos(\omega_0 t + \alpha) ,$$

und versuchen C und α so zu bestimmen, dass diese Funktion die Differenzialgleichung (14) löst.

Es gilt (rechnen Sie das zur Übung einmal nach!)

$$s_{\text{part}}''(t) = -2C\omega_0 \sin(\omega_0 t + \alpha) - Ct\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \alpha) .$$

Setzen wir dies in (14) ein und verwenden $\omega_0 = \omega_A$, ergibt sich

$$\begin{aligned} s_{\text{part}}''(t) + \omega_0^2 s_{\text{part}}(t) &= \omega_0^2 A \cos(\omega_A t) \\ \Leftrightarrow -2C\omega_0 \sin(\omega_0 t + \alpha) - Ct\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \alpha) + \omega_0^2 Ct \cos(\omega_0 t + \alpha) &= \omega_0^2 A \cos(\omega_0 t) \\ \Leftrightarrow -2C\omega_0 \sin(\omega_0 t + \alpha) &= \omega_0^2 A \cos(\omega_0 t) . \end{aligned}$$

Weil $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(x)$, wählen wir $\alpha = \frac{\pi}{2}$ und haben

$$\begin{aligned} -2C\omega_0 \cos(\omega_0 t) &= \omega_0^2 A \cos(\omega_0 t) \\ \Leftrightarrow -2C\omega_0 &= \omega_0^2 A \\ \Leftrightarrow C &= -\frac{\omega_0}{2} \cdot A , \end{aligned}$$

also

$$s_{\text{part}}(t) = Ct \cos(\omega_0 t + \alpha) = -\frac{\omega_0}{2} \cdot At \cos\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\omega_0}{2} \cdot At \sin(\omega_0 t) .$$

Die Lösungsschar der inhomogenen Differenzialgleichung (14) ist somit

$$\begin{aligned} s(t) &= c_1 \cos(\omega_0 t) + c_2 \sin(\omega_0 t) - \frac{\omega_0}{2} \cdot At \sin(\omega_0 t) \\ &= c_1 \cos(\omega_0 t) + \left(c_2 - \frac{\omega_0}{2} \cdot At\right) \sin(\omega_0 t) . \end{aligned}$$

Ein typisches Beispiel einer solchen Funktion zeigt Abbildung 28. Man erkennt deutlich, dass in diesem Fall eine Resonanz auftritt, die das Pendel immer stärker ausschlagen lässt.