

2. Fall: $D < 0$ Mit $\lambda = -\frac{a_1}{2a_2}$ und $\beta = \frac{\sqrt{-D}}{2a_2}$ bilden

$$f(x) = e^{\lambda x} \cos \beta x \quad \text{und} \quad g(x) = e^{\lambda x} \sin \beta x$$

ein Fundamentalsystem.

3. Fall: $D = 0$ Mit $\lambda = -\frac{a_1}{2a_2}$ bilden

$$f(x) = e^{\lambda x} \quad \text{und} \quad g(x) = x e^{\lambda x}$$

ein Fundamentalsystem.

In allen drei Fällen ist $y(x) = c_1 f(x) + c_2 g(x)$ mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösungsschar.

4.1.7 Beispiel Betrachten wir die Differenzialgleichung aus Beispiel 4.1.5:

$$y'' - 2y' - 3y = 0$$

also $a_2 = 1$, $a_1 = -2$ und $a_0 = -3$. Es folgt

$$D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 16 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = -\frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \begin{cases} -1 \\ 3 \end{cases} .$$

e^{-x} und e^{3x} bilden nach unserem Satz also ein Fundamentalsystem und es ist klar, wie die Lösungen aus Beispiel 4.1.5 gefunden wurden.

Inhomogene lineare Differenzialgleichungen zweiter Ordnung

Die Lösungsschar einer inhomogenen linearen Differenzialgleichung zweiter Ordnung

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)$$

kann ähnlich zu inhomogenen linearen Differenzialgleichung erster Ordnung bestimmt werden:

(1) Wir ermitteln die allgemeine Lösung y_{hom} der homogenen Differenzialgleichung

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 .$$

(2) Wir ermitteln (dies ist leider oft schwierig) eine partikuläre Lösung y_{part} der inhomogenen Differenzialgleichung.

(3) Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung ist dann gegeben durch

$$y(x) = y_{\text{hom}}(x) + y_{\text{part}}(x) .$$

Klassische Beispiele für solche Differenzialgleichungen sind Schwingungen, mit denen wir uns im folgenden Abschnitt befassen.

4.2 Schwingungen

Schwingungen liegen vielen physikalischen und anderen naturwissenschaftlichen Betrachtungen zugrunde. Wir betrachten hier als Beispiel ein *Federpendel*, bei dem eine Masse an einer Feder hängt. Andere Schwingungen werden aber genauso behandelt, beispielsweise hätte ein elektrischer Schwingkreis aus Kondensator und Spule die gleiche mathematische Beschreibung (und Lösung).

Im folgenden wollen wir uns die mathematische Modellierung anschauen.

Ungedämpfte Schwingung

Ein einfacher Fall ist die *ungedämpfte* Schwingung:

Eine Masse m hängt an einer Feder und wird aus der Ruhelage um die Strecke $s_0 = s(0)$ ausgelenkt. $s(t)$ ist jeweils die Auslenkung zur Zeit t .

Zu jedem Zeitpunkt t wirkt die Kraft $F(t)$ der Feder proportional zur Auslenkung $s(t)$ mit einer *Federkonstanten* $k > 0$:

$$F(t) = -k \cdot s(t)$$

($F(t)$ wirkt entgegen der Auslenkung, daher das negative Vorzeichen).

Nach dem Newtonschen Gesetz "Kraft ist Masse mal Beschleunigung" ist andererseits

$$F(t) = m \cdot s''(t)$$

(die Beschleunigung ist die Ableitung der Geschwindigkeit, die Geschwindigkeit $s'(t)$ ist die Ableitung des Weges). Insgesamt ist also $ms''(t) = -ks(t)$ und damit

$$ms''(t) + ks(t) = 0. \quad (13)$$

Dies ist die *Schwingungsdifferentialgleichung einer ungedämpften Schwingung*.

Hier ist also $a_2 = m$, $a_1 = 0$ und $a_0 = k$. Damit ist $D = -4mk < 0$ (2. Fall aus Satz 4.1.6) und wir können das Fundamentalsystem berechnen:

$$\text{Es ist } \lambda = -\frac{a_1}{2a_2} = 0 \text{ und } \beta = \frac{\sqrt{-D}}{2a_2} = \frac{\sqrt{4mk}}{2m} = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

β wird auch *Winkelgeschwindigkeit* oder *Kreisfrequenz* genannt und mit ω_0 bezeichnet. Die *Periodendauer* ist $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ und die *Eigenfrequenz* der Schwingung ist $f = \frac{\omega_0}{2\pi}$.

$f(t) = \cos \omega_0 t$ und $g(t) = \sin \omega_0 t$ bilden also ein Fundamentalsystem und die allgemeine Lösung der Schwingungsdifferentialgleichung ist

$$s(t) = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t \quad \text{mit } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

4.2.1 Beispiel Betrachten wir das Pendel ohne zusätzlichen Anfangsimpuls, d.h. $s'(0) = 0$, und mit einer Anfangsauslenkung $s(0) = s_0$. Das Anfangswertproblem ist hier also

$$s(0) = s_0 \quad \text{und} \quad s'(0) = 0.$$

Es ist $s'(t) = -c_1 \omega_0 \sin \omega_0 t + c_2 \omega_0 \cos \omega_0 t$, also folgt aus $s'(0) = c_2 \omega_0 = 0$, dass $c_2 = 0$. Es folgt weiter $s(t) = c_1 \cos \omega_0 t$, insbesondere $s(0) = c_1 = s_0$ und insgesamt die partikuläre Lösung

$$s(t) = s_0 \cos \omega_0 t.$$

4.3 Gedämpfte Schwingungen

In der Praxis werden Schwingungen meist durch Reibung, Luftwiderstand o.ä. gedämpft. Diese Dämpfung ist proportional zur Geschwindigkeit, mit der die Masse sich jeweils bewegt. Beschrieben wird dies durch

$$ms''(t) + \rho s'(t) + ks(t) = 0 \quad \text{mit einer Dämpfungskonstanten } \rho > 0.$$

Dies entspricht der Differentialgleichung einer ungedämpften Schwingung (13), es kommt jedoch noch eine *Dämpfung* hinzu, die proportional zur Geschwindigkeit ist. Diese Dämpfung ist also $\rho s'(t)$.