Differenzialgleichungen

4 Gewöhnliche Differenzialgleichungen

4.1 Bezeichnungen

Betrachten wir folgende Situation: $n(t)$ sei die Anzahl der Atome in einer radioaktiven Probe zum Zeitpunkt t. Durch den Zerfall ändert sich diese Zahl, die Ableitung $n'(t)$ gibt bekanntlich diese Veränderung an.

Diese Veränderung ist proportional zur jeweiligen Zahl der Atome $n(t)$, mit einer Substanz-spezifischen Konstanten $k \geq 0$ gilt also

$$n'(t) = -k \cdot n(t) \ . \tag{13}$$

Unsere Aufgabe besteht nun darin, $n(t)$ zu bestimmen, also eine Funktion zu finden, die die Gleichung (13) erfüllt.

4.1.1 Bezeichnungen Eine Gleichung, wie beispielsweise (13), in der neben einer unbekannten Funktion auch deren Ableitung auftritt, heißt *Differenzialgleichung*. Wenn es sich wie in (13) um die erste Ableitung handelt, spricht man von einer Differenzialgleichung *erster Ordnung*, allgemein handelt es sich um eine Differenzialgleichung *n-ter Ordnung*, wenn höhere Ableitungen bis zur n-ten Ordnung auftreten.

Wenn die gesuchte Funktion von mehreren Variablen abhängt, können auch partielle Ableitungen auftreten, dann handelt es sich um eine *partielle Differenzialgleichung*, sonst um eine *gewöhnliche*.

Die gesuchte Funktion, die die Differenzialgleichung erfüllt, heißt *Lösung* der Differenzialgleichung.

Wir werden uns zunächst nur mit gewöhnlichen Differenzialgleichungen erster Ordnung befassen.

4.1.2 Notation Die gesuchte Funktion wird meist $y(x)$ geschrieben und zur Abkürzung wird „(x)“ hinter y, y',... einfach weggelassen. Aus (13) wird also

$$y' = -ky \ .$$

Allgemein kann man eine gewöhnliche Differenzialgleichung erster Ordnung in der Form

$$y' = f(x, y)$$

und eine Differenzialgleichung n-ter Ordnung in der Form $y^{(n)} = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right)$ schreiben.

4.1.3 Beispiel Eine Lösung der Differenzialgleichung $y' = -2y$ ist $y(x) = e^{-2x}$, denn es folgt $y'(x) = -2e^{-2x} = -2y(x)$.

Auch $y(x) = 2e^{-2x}$ oder $y(x) = -e^{-2x}$ sind Lösungen der Differenzialgleichung, wie man leicht nachrechnet.

Wie wir sehen, gibt es im Allgemeinen mehrere Lösungen einer Differenzialgleichung, man spricht dann von einer *Lösungsschar*.

4.2 Richtungsfelder

Die verschiedenen Lösungen einer Differenzialgleichung können graphisch dargestellt werden, sogar ohne, dass man diese Lösungen explizit kennen muss:

Betrachten wir eine Differenzialgleichung

$$y' = f(x, y) \ ,$$

(also $y'(x) = f(x, y(x))$) und einen Punkt $\binom{a}{b} \in \mathbb{R}^2$. Nehmen wir an, wir hätten eine Lösung $y(x)$ der Differenzialgleichung, deren Graph durch den Punkt $\binom{a}{b}$ läuft, d.h., für die $y(a) = b$ gilt.

Wir kennen dann die Steigung von $y(x)$ in diesem Punkt, nämlich

$$y'(a) = f(a, y(a)) = f(a, b) \ .$$

4.2.1 Bezeichnungen Da uns also in jedem Punkt $\binom{a}{b}$ die Steigung von y bekannt ist, können wir diese Steigung für jeden Punkt der Ebene als kleinen Pfeil einzeichnen. Dies bezeichnet man als *Richtungsfeld*.

Zeichnen wir eine Kurve, die diesen Pfeilen folgt und durch einen bestimmten Punkt $\binom{a}{b}$ läuft, so erhalten wir den Graphen einer einzelnen Lösung, die (im Gegensatz zur Lösungsschar) als *partikuläre Lösung* bezeichnet wird. Für diese Lösung gilt dann $y(a) = b$.

Die Aufgabe, zu einer Differenzialgleichung eine partikuläre Lösung mit $y(a) = b$ zu finden, heißt *Anfangswertproblem*.

4.2.2 Beispiele Betrachten wir $y' = -\dfrac{x}{y}$

Tragen wir $-\frac{x}{y}$ für verschiedene x und y in eine Tabelle ein, so erhalten wir z.B.

	$x = -2$	-1	0	1	2
$y = 1$	2	1	0	-1	-2
2	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1

Das Richtungsfeld erhalten wir, indem wir diese Werte als Steigungen in ein Koordinatensystem einzeichnen (Abbildung 24).

Folgen wir von einem Punkt $\binom{x_0}{y_0}$ den Pfeilen, erhalten wir die partikuläre Lösung des Anfangswertproblems $y(x_0) = y_0$.

Weitere Beispiele sind in den Abbildungen 25, 26 und 27 zu finden.

4.3 Elementare Lösungsverfahren

Es gibt leider kein allgemeines Verfahren, eine beliebige Differenzialgleichung zu lösen. Bei vielen bestimmten Typen von Differenzialgleichungen lassen sich aber Lösungen bestimmen.

Wir werden nun einige der gewöhnliche Differenzialgleichungen erster Ordnung klassifizieren und jeweils zugehörige Lösungsansätze ermitteln.

Typ (A) $y' = f(x)$

Bei diesem Typ hängt die „rechte Seite“ nicht von y ab.

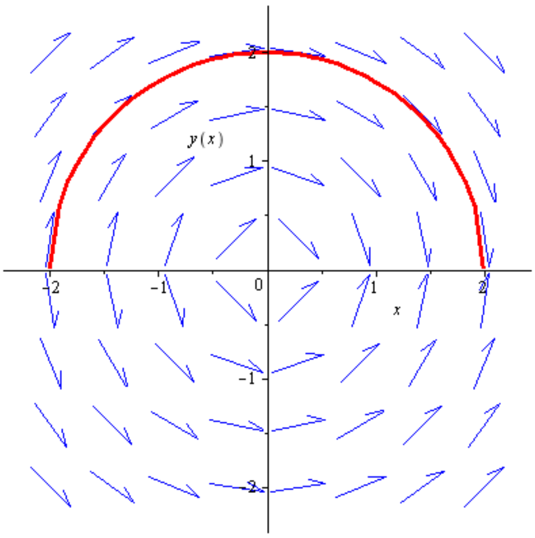

Abbildung 24: Richtungsfeld von $y' = -\frac{x}{y}$ mit partikulärer Lösung zu $y(0) = 2$

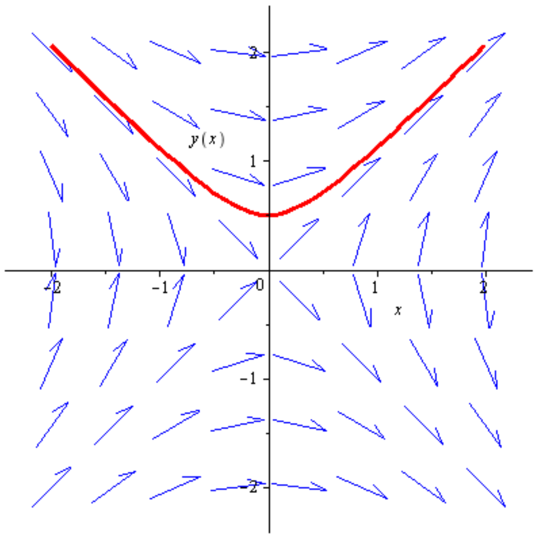

Abbildung 25: Richtungsfeld von $y' = \frac{x}{y}$ mit partikulärer Lösung zu $y(0) = \frac{1}{2}$

4.3.1 Beispiel $y' = 2x$

Eine Lösung ist hier recht leicht zu finden: Wir integrieren beide Seiten der Differenzialgleichung und erhalten

$$y'(x) = 2x \qquad \Rightarrow \qquad \int y'(x)\,dx = \int 2x\,dx \qquad \Rightarrow \qquad y(x) = x^2 + C\ .$$

Die Integrationskonstanten beider Seiten haben wir hier zu einer Konstanten C zusammengefasst. $y(x) = x^2 + C$ ist also unsere Lösungsschar.

Für jedes $C \in \mathbb{R}$ erhalten wir eine partikuläre Lösung: Ist zum Beispiel das Anfangswertproblem $y(0) = 0$ gegeben, so ergibt sich

$$y(0) = 0^2 + C = 0 \qquad \Rightarrow \qquad C = 0\ .$$

$y(x) = x^2$ ist folglich in diesem Fall die partikuläre Lösung.

Im Allgemeinen lösen wir eine Differenzialgleichung diesen Typs also durch Integration:

$$y' = f(x) \qquad \Rightarrow \qquad \int y'(x)\,dx = \int f(x)\,dx \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{y(x) = \int f(x)\,dx} \tag{14}$$

Auch einige wichtige Anwendungen von Differenzialgleichungen gehören zu diesem Typ:

4.3.2 Beispiel Manche chemische Reaktionen gehorchen einem sog. „Geschwindigkeitsgesetz nullter Ordnung“ — ein Beispiel hierfür ist z.B. der Alkoholabbau im Blut, der näherungsweise diesem Gesetz folgt. Dabei ist der Abbau der Konzentration stets konstant, also unabhängig von der Konzentration. Wenn $c_A(t)$ die Konzentration zum Zeitpunkt t beschreibt, gilt also

$$c_A' = -k \qquad \text{mit einem Geschwindigkeitskoeffizienten } k\ .$$

In (14) setzen wir $y = c_A$ und $f(t) = -k$ und erhalten

$$c_A(t) = \int -k\,dt = -k \cdot t\ .$$

Dr. Peter Bauer
SS 25 — 6. Juni 2025
Rev: 14140