3.4.9 Beispiel Betrachten wir $f(x,y) = x^3 + y^3$.

Es ist $f_x(x,y) = 3x^2$ und $f_y(x,y) = 3y^2$ und

$$f_{xx}(x,y) = 6x \qquad f_{xy}(x,y) = 0$$
$$f_{yx}(x,y) = 0 \qquad f_{yy}(x,y) = 6y$$

und die Hesse-Matrix lautet daher

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 6y \end{pmatrix} .$$

Beispielsweise ist also $H_f(1,2) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$.

Die Hesse-Matrix wird nun also die Rolle der zweiten Ableitung übernehmen, wir benötigen aber noch ein Kriterium, das statt $f''(x) > 0$ bzw. $f''(x) < 0$ verwendet werden kann, da wir bei einer Matrix natürlich nicht einfach nach dem Vorzeichen fragen können:

3.4.10 Definition Eine symmetrische Matrix A habe die Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

A ist *positiv definit*, wenn alle $\lambda_i > 0$ sind,

A ist *negativ definit*, wenn alle $\lambda_i < 0$ sind,

A ist *positiv semidefinit*, wenn alle $\lambda_i \geq 0$ sind,

A ist *negativ semidefinit*, wenn alle $\lambda_i \leq 0$ sind und

A ist *indefinit*, wenn es positive und negative Eigenwerte gibt.

Damit haben wir nun alle Werkzeuge zusammen, um die Extrema einer Funktion finden zu können:

3.4.11 Satz (Hinreichendes Kriterium für Extremwerte) Sei $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$, eine Funktion mit stetigen partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung.

In $\vec{a} \in D$ gelte $\operatorname{grad} f(\vec{a}) = \vec{0}$. f hat dann in $\vec{a}$

…ein Maximum, wenn $H_f(\vec{a})$ negativ definit ist,

…ein Minimum, wenn $H_f(\vec{a})$ positiv definit ist und

…kein lokales Extremum, wenn $H_f(\vec{a})$ indefinit ist.

Ist $H_f(\vec{a})$ semidefinit, können wir keine Aussage über ein Extremum in diesem Punkt machen.

3.4.12 Beispiele **(1)** $f(x,y) = x^2 + y^2 + 1$ (vgl. Abbildung 20)

Es ist $f_x(x,y) = 2x$ und $f_y(x,y) = 2y$, es ist also

$$\operatorname{grad} f(x,y) = (2x, 2y) = (0,0) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

An der Stelle $\binom{0}{0}$ ist also ein Extremum möglich.

Die Hesse-Matrix von f lautet

$$H_f(\vec{a}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{für alle } \vec{a}.$$

Bei einer solchen Dreiecksmatrix sind die Eigenwerte nach Satz 2.11.6 besonders leicht zu ermitteln: sie stehen auf der Diagonalen von links oben nach rechts unten. In diesem Fall gibt es also nur einen Eigenwert, nämlich 2. $H_f(\vec{0})$ ist folglich positiv definit und f hat daher ein Minimum in $\vec{0}$.

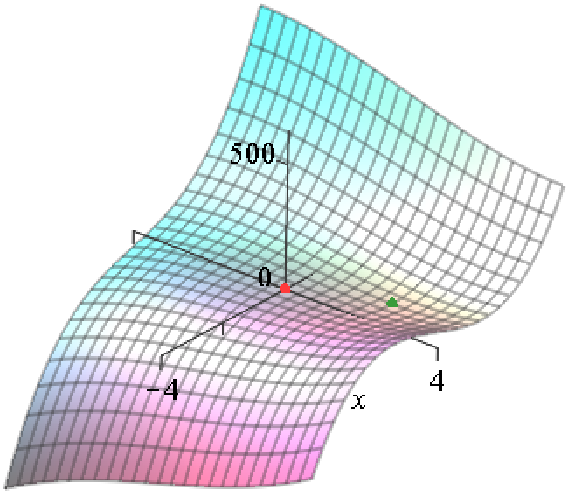


Abbildung 21: $f(x,y) = x^3 - 12xy + 8y^3$ mit möglichen Extrema in $\binom{0}{0}$ und $\binom{2}{1}$

(2) $f(x,y) = x^3 - 12xy + 8y^3$ (vgl. Abbildung 21)

Es gilt

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \left(3x^2 - 12y, -12x + 24y^2\right) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \qquad 3x^2 - 12y = 0 \tag{9}$$

$$\text{und} \qquad -12x + 24y^2 = 0 \tag{10}$$

Dies ist zwar ein Gleichungssystem, es ist aber offensichtlich nicht linear. Unsere üblichen Verfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme können wir also nicht verwenden.

Gleichung (9) ergibt

$$y = \frac{1}{4}x^2 \tag{11}$$

und damit erhalten wir aus Gleichung (10)

$$\begin{aligned}
& -12x + \frac{3}{2}x^4 = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & x\left(-12 + \frac{3}{2}x^3\right) = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & x = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{3}{2}x^3 = 12 \\
\Leftrightarrow \quad & x = 0 \quad \text{oder} \quad x = 2
\end{aligned}$$

Unter Verwendung von (11) ist

$$\begin{aligned}
x = 0 \quad &\Rightarrow \quad y = 0 \\
x = 2 \quad &\Rightarrow \quad y = 1\,,
\end{aligned}$$

also können mögliche lokale Extrema in $\binom{0}{0}$ und in $\binom{2}{1}$ liegen.

Um zu entscheiden, ob es dort tatsächlich Extremwerte gibt, müssen wir die Definitheit der Hesse-Matrix prüfen. Es ist

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & -12 \\ -12 & 48y \end{pmatrix}.$$

Im Punkt $\binom{0}{0}$ ist $H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -12 \\ -12 & 0 \end{pmatrix}$. Die Eigenwerte dieser Matrix sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$P(\lambda) = \det(H_f(0,0) - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & -12 \\ -12 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 144 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda = \pm 12 \; .$$

$H_f(0,0)$ hat also sowohl einen positiven als auch einen negativen Eigenwert, ist also indefinit und somit gibt es an der Stelle $\binom{0}{0}$ kein Extremum.

Im Punkt $\binom{2}{1}$ ist $H_f(2,1) = \begin{pmatrix} 12 & -12 \\ -12 & 48 \end{pmatrix}$ und die Eigenwerte sind

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \det(H_f(2,1) - \lambda E) \\ &= \begin{vmatrix} 12-\lambda & -12 \\ -12 & 48-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (12-\lambda)(48-\lambda) - 144 \\ &= \lambda^2 - 60\lambda + 432 = 0 \\ \Rightarrow \qquad \lambda &= 30 \pm \sqrt{468} \approx \begin{cases} 51.63 & > 0 \\ 8.36 & > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$H_f(2,1)$ ist demnach positiv definit, wir haben in $\binom{2}{1}$ also ein Minimum.

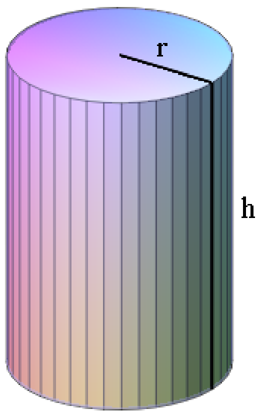
3.5 Extrema mit Nebenbedingungen

Betrachten wir folgendes Problem:

Welche Maße muss eine Dose haben, damit möglichst wenig Blech verbraucht wird ?

Die Oberfläche einer Dose (Zylinder) der Höhe h und mit Radius r ist

$$\underbrace{2\pi r}_{\text{Umfang}} \cdot \underbrace{h}_{\text{Höhe}} + 2 \cdot \underbrace{\pi r^2}_{\text{Fläche der Ober-/Unterseite}} \; .$$



Wir müssen also nach einem Minimum von $F(r,h) = 2\pi rh + 2\pi r^2$ suchen:

$$\operatorname{grad} F(r,h) = (2\pi h + 4\pi r, 2\pi r) = \vec{0}$$

also

$$2\pi h + 4\pi r = 0 \quad \text{und} \quad 2\pi r = 0 \; .$$

Aus der zweiten Gleichung ergibt sich $r = 0$ und wenn wir dies in die erste Gleichung einsetzen, erhalten wir $h = 0$. Ein mögliches Extremum des Materialverbrauchs haben wir also bei einer Dose mit Höhe und Radius 0. Wie man das bei mathematischen Resultaten erwarten kann, ist dieses Ergebnis natürlich völlig richtig — es ist aber nicht wirklich nützlich.

Sinnvoll wird unsere Überlegung erst, wenn wir zusätzlich verlangen, dass die Dose ein gegebenes Volumen haben soll:

$$V(r,h) = \pi r^2 \cdot h = C \; .$$

Dies ist eine Extremwertaufgabe mit einer *Nebenbedingung*:

Wann ist die Oberfläche $F(r,h)$ minimal unter der Nebenbedingung, dass $V(r,h) = C$?

Es gilt:

3.5.1 Satz Wenn es ein Extremum einer Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$, unter der Nebenbedingung $g(\vec{x}) = 0$ für $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $\operatorname{grad} g(\vec{x}) \neq \vec{0}$ gibt, dann in einem Punkt $\vec{x}$ mit

$$g(\vec{x}) = 0 \qquad \text{und} \qquad \operatorname{grad} f(\vec{x}) = \lambda \cdot \operatorname{grad} g(\vec{x}) \qquad \text{für ein } \lambda \in \mathbb{R}.$$

3.5.2 Bemerkung **(1)** So gut wie jede Nebenbedingung lässt sich in der Form $g(\vec{x}) = 0$ ausdrücken. Unsere obige Bedingung $V(r, h) = \pi r^2 \cdot h = C$ können wir beispielsweise in der Form $g(r, h) = V(r, h) - C = 0$ schreiben.

(2) λ heißt *Lagrange-Multiplikator*. Der Wert von λ hat keine weitere Bedeutung.

(3) Der Satz sagt nicht, wo Extrema liegen, es handelt sich nur um ein notwendiges Kriterium. Wir können aber hiermit die Stellen errechnen, an denen Extrema *möglich* sind. Ob es dort dann tatsächlich Extremwerte gibt, muss auf anderem Weg entschieden werden — in der Praxis genügt hierzu meistens die Anschauung.

3.5.3 Beispiele **(1)** Unser Dosen-Beispiel: Wo liegt ein mögliches Minimum von

$$F(r, h) = 2\pi r h + 2\pi r^2$$

unter der Nebenbedingung

$$g(r, h) = V(r, h) - C = \pi r^2 \cdot h - C = 0 \quad ? \tag{12}$$

Wir müssen zuerst prüfen, ob die Voraussetzungen von Satz 3.5.1 erfüllt sind: Es gilt

$$\operatorname{grad} g(r, h) = \left(2\pi r h, \pi r^2\right) \neq (0, 0) \qquad \text{für } r \neq 0.$$

Für $r \neq 0$ können wir unseren Satz also benutzen (der Fall $r = 0$ ist auch offensichtlich uninteressant). Nach Satz 3.5.1 gilt also an der Stelle eines Extremums unter der Nebenbedingung (12)

$$\begin{array}{rlr} & & g(r,h) = 0 \\ & \text{und} & \operatorname{grad} F(r,h) = \lambda \operatorname{grad} g(r,h) \\[1ex] \Leftrightarrow & & \pi r^2 h - C = 0 \\ & \text{und} & (2\pi h + 4\pi r, 2\pi r) = \lambda \left(2\pi r h, \pi r^2\right) \\[1ex] \Leftrightarrow & & \pi r^2 h = C \\ & \text{und} & 2\pi h + 4\pi r = 2\lambda\pi r h \\ & \text{und} & 2\pi r = \lambda \pi r^2 \\[1ex] \Leftrightarrow & & \pi r^2 h = C \\ & \text{und} & h + 2r = \lambda r h \\ & \text{und} & 2 = \lambda r \end{array}$$

Aus der letzten Zeile folgt $r = \frac{2}{\lambda}$. Setzen wir dies in die vorletzte Zeile ein, erhalten wir $h + \frac{4}{\lambda} = 2h \Leftrightarrow h = \frac{4}{\lambda}$.

Insgesamt gilt also $h = 2r$, d.h. wenn es ein Minimum gibt, dann bei Dosen, deren Höhe doppelt so groß ist wie ihr Radius.

Auch die Werte für h und r können wir berechnen: Ist C das gewünschte Volumen, dann gilt wegen $h = 2r$

$$\pi r^2 h = C \qquad \Leftrightarrow \qquad \pi r^2 \cdot 2r = C \qquad \Leftrightarrow \qquad 2\pi r^3 = C \qquad \Leftrightarrow \qquad r = \sqrt[3]{\frac{C}{2\pi}}\,.$$

Soll die Dose beispielsweise ein Volumen von $C = 500\,\text{ml}$ haben, so erhalten wir $r \approx 4.3\,\text{cm}$ und damit $h \approx 8.6\,\text{cm}$.

(2) Wo liegen mögliche Extrema von $f(x, y) = xy$ unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 2$?
Hier formulieren wir die Nebenbedingung in der Form $g(x, y) = x^2 + y^2 - 2 = 0$ und es gilt

$$\operatorname{grad} g(x, y) = (2x, 2y) \neq (0, 0) \qquad \text{für} \qquad (x, y) \neq \vec{0} \, .$$

Sei also $(x, y) \neq \vec{0}$. Laut Satz 3.5.1 erfüllen eventuelle Extremalstellen

$$\begin{array}{rrl} & g(x,y) &= 0 \\ \text{und} & \operatorname{grad} f(x,y) &= \lambda \operatorname{grad} g(x,y) \\[1ex] \Leftrightarrow & x^2 + y^2 - 2 &= 0 \\ \text{und} & (y, x) &= \lambda(2x, 2y) \\[1ex] \Leftrightarrow & x^2 + y^2 &= 2 \\ \text{und} & y &= 2\lambda x \\ \text{und} & x &= 2\lambda y \, . \end{array}$$

Setzen wir die letzte Gleichung in die vorletzte ein, so erhalten wir

$$y = 2\lambda \cdot 2\lambda y \qquad \Leftrightarrow \qquad \lambda^2 = \frac{1}{4} \qquad \Leftrightarrow \qquad \lambda = \pm\frac{1}{2} \, .$$

Wir können nun x und y berechnen:
Für $\lambda = \frac{1}{2}$ folgt $y = 2\lambda x \;\Leftrightarrow\; y = x$ und

$$x^2 + y^2 = 2 \qquad \Leftrightarrow \qquad 2x^2 = 2 \qquad \Leftrightarrow \qquad x^2 = 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \pm 1 \, ,$$

mögliche Extrema liegen also in $\binom{1}{1}$ und $\binom{-1}{-1}$.
Für $\lambda = -\frac{1}{2}$ folgt $y = 2\lambda x \;\Leftrightarrow\; y = -x$ und wie oben

$$x^2 + y^2 = 2 \qquad \Leftrightarrow \qquad 2x^2 = 2 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \pm 1 \, ,$$

mögliche Extrema liegen hier also in $\binom{1}{-1}$ und $\binom{-1}{1}$.

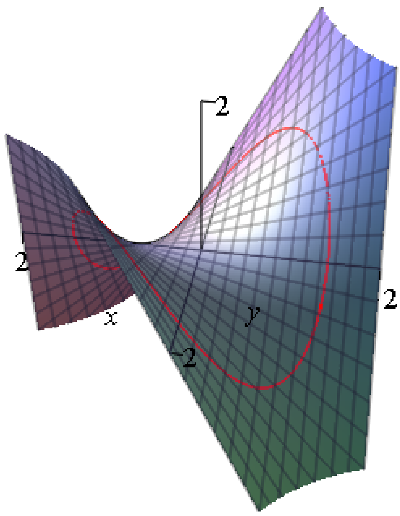


Abbildung 22: $f(x, y) = xy$ und die Punkte mit $x^2 + y^2 = 2$

Insgesamt haben wir also vier Stellen, an denen eventuell Extrema unter der Nebenbedingung existieren. Am Graphen (Abbildung 22, dort sind die Punkte, für die die Nebenbedingung gilt, mit einer roten Linie markiert) können wir erkennen, dass es Maxima in $\binom{1}{1}$ und $\binom{-1}{-1}$ $(f(x, y) = 1)$ sowie Minima in $\binom{-1}{1}$ und $\binom{1}{-1}$ $(f(x, y) = -1)$ gibt.

3.6 Vektorfelder

Kommen wir noch einmal auf den Gradienten zurück. Nach Def. 3.4.1 ist

$$\operatorname{grad} f(\vec{a}) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} f(\vec{a}), \frac{\partial}{\partial x_2} f(\vec{a}), \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n} f(\vec{a}) \right)$$

für eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subset \mathbb{R}^n$.

f ist also eine Funktion, die jedem Punkt eines mehrdimensionalen Raumes einen Skalar zuweist. Eine solche Funktion wird deshalb auch als *Skalarfeld* bezeichnet.

Analog bezeichnet man eine Funktion $v : D \to \mathbb{R}^n$ mit $D \subset \mathbb{R}^n$, die jedem Punkt eines Raumes einen Vektor (gleicher Dimension) zuweist, als *Vektorfeld*.

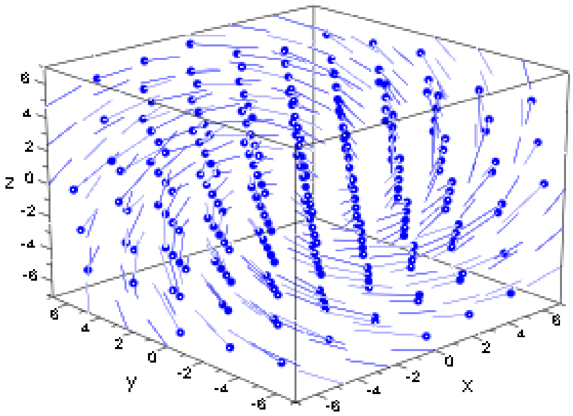


Abbildung 23: 3-dimensionales Vektorfeld $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

Ein Beispiel für ein Vektorfeld ist der Gradient einer Funktion (Gradient eines Skalarfeldes): er weist einem Punkt $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ den Vektor $\left(\frac{\partial}{\partial x_1} f(\vec{a}), \frac{\partial}{\partial x_2} f(\vec{a}), \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n} f(\vec{a}) \right) \in \mathbb{R}^n$ zu. Man spricht deshalb auch von einem *Gradientenfeld*. In diesem Zusammenhang verwendet man oft eine andere Schreibweise:

Mit dem *Nabla-Operator* $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$ ist[5]

$$\nabla f = \operatorname{grad} f \ .$$

Betrachten wir ein *partiell differenzierbares Vektorfeld*, d.h. alle Komponenten-Funktionen sind partiell differenzierbar, dann lassen sich mit dem Nabla-Operator zwei weitere Funktionen beschreiben.

Die *Divergenz* beschreibt die Tendenz eines Vektorfeldes „auseinanderzufließen“, die *lokale Quellendichte*. Es handelt sich dabei um das Skalarprodukt des Nabla-Operators mit einem Vektorfeld $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$:

$$\operatorname{div} v = \nabla \cdot v = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial x_1} v_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} v_2 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n} v_n \ .$$

[5] Das Zeichen ∇ ähnelt der Form einer Harfe, alt-griechisch „Nabla“.

Analog bezeichnet die *Rotation* die Tendenz eines dreidimensionalen Vektorfeldes, um Punkte zu rotieren, die *lokale Wirbeldichte*. Dies ist das Vektorprodukt des Nabla-Operators mit dem Vektorfeld:

$$\operatorname{rot} v = \nabla \times v = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_2} v_3 - \frac{\partial}{\partial x_3} v_2 \\ \frac{\partial}{\partial x_3} v_1 - \frac{\partial}{\partial x_1} v_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} v_2 - \frac{\partial}{\partial x_2} v_1 \end{pmatrix} .$$