

7 Exkurs: Fourier-Reihen

Im allgemeinen lässt sich — wie wir in Abschnitt 5.5 gesehen haben — eine Funktion durch ihre Taylor-Reihe als Potenzreihe darstellen. Es gibt weitere Reihen-Darstellungen, die in manchem Kontext ebenfalls sehr nützlich sein können.⁸

Wir erinnern uns: Eine Funktion ist *periodisch mit der Periode T* , wenn

$$f(t) = f(t + T) .$$

Bei solchen Funktionen genügt es offenbar, die Funktion auf einem Intervall der Länge T zu betrachten, beispielsweise auf $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$.

Ähnlich wie viele Funktionen durch Taylor-Reihen dargestellt werden können, lassen sich periodische Funktionen oft durch *Fourier-Reihen* darstellen:

Zur Abkürzung setzen wir

$$\omega = \frac{2\pi}{T} .$$

ω wird als *Grundfrequenz* bezeichnet. Damit ist die *Fourier-Reihe* von f

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)) ,$$

wobei die Koeffizienten gegeben sind durch

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(k\omega t) dt$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(k\omega t) dt .$$

f wird also als Summe von Cosinus- und Sinus-Funktionen dargestellt. Die Frequenzen $k\omega$ sind Vielfache der Grundfrequenz, die sog. *Oberschwingungen*. Die Koeffizienten a_k und b_k geben die *Amplituden* dieser Schwingungen an.

7.0.1 Beispiel Betrachten wir eine *Rechteck-Kurve* mit Periode $T = 2$ (vgl. Abb. 48, links). Die Fourier-Reihe dieser Funktion ist mit $\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi$

$$f(t) = \frac{4}{T} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin((2k-1)\pi t)}{2k-1} .$$

Die ersten Summanden dieser Reihe sind bereits eine gute Approximation (vgl. Abb. 48, rechts) der Rechteckkurve, also

$$f(t) \approx \frac{4}{\pi} \left(\sin(\pi t) + \frac{\sin(3\pi t)}{3} + \frac{\sin(5\pi t)}{5} + \frac{\sin(7\pi t)}{7} \right) .$$

⁸Ich werde im folgenden nur die groben Ideen und Zusammenhänge erläutern und auf viele Einzelheiten nicht näher eingehen.

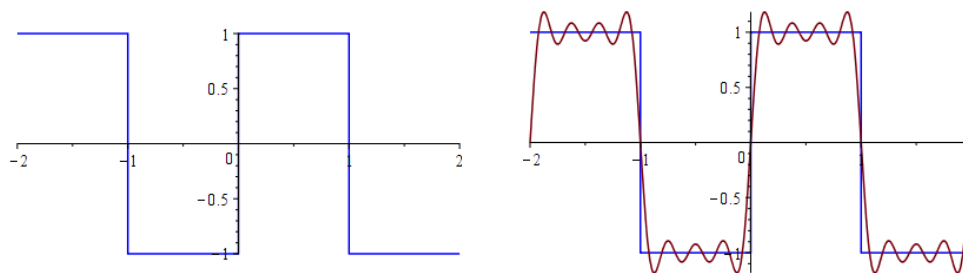


Abbildung 48: Rechteckkurve und ihre Approximation durch die ersten Summanden der Fourier-Reihe

Verwenden wir komplexe Zahlen, lässt sich die Darstellung vereinfachen: Nach der Eulerschen Formel (Satz 2.4.1) ist $e^{iy} = \cos y + i \sin y$. Damit folgt

$$e^{iy} + e^{-iy} = \cos y + i \sin y + \underbrace{\cos(-y)}_{=\cos y} + i \underbrace{\sin(-y)}_{=-\sin y} = 2 \cos y ,$$

also

$$\cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}$$

und analog erhält man

$$\sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i} = -i \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2} .$$

Eingesetzt in die Fourier-Reihe ergibt sich

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a_k}{2} e^{ik\omega t} + \frac{a_k}{2} e^{-ik\omega t} - \frac{ib_k}{2} e^{ik\omega t} + \frac{ib_k}{2} e^{-ik\omega t} \right) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a_k - ib_k}{2} e^{ik\omega t} \right) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a_k + ib_k}{2} e^{-ik\omega t} \right) \end{aligned}$$

Setzen wir für $k = 1, 2, 3, \dots$

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{a_k - ib_k}{2} , \\ c_{-k} &= \frac{a_k + ib_k}{2} , \\ \text{und} \quad c_0 &= \frac{a_0}{2} \end{aligned}$$

haben wir die Fourier-Reihe von f in einer viel einfacheren Darstellung:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega t} .$$

Auch die Koeffizienten c_k können wir umrechnen und erhalten

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-ik\omega t} dt .$$

Leider sind viele Funktionen nicht periodisch. Trotzdem können wir unsere Überlegungen verwenden. Die Idee ist, nicht-periodische Funktionen als periodische Funktionen mit “unendlicher Periode” zu betrachten. Mathematisch betrachten wir also den Grenzwert für $T \rightarrow \infty$.

Wir schreiben unsere Fourier-Reihe ein wenig um:

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega t} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{2\pi}}{\omega} c_k e^{ik\omega t} \cdot \omega \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k\omega) e^{ik\omega t} \cdot \omega \end{aligned} \quad (27)$$

mit $\hat{f}(k\omega) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\omega} c_k$.

Es ist $\omega = \frac{2\pi}{T}$ und deshalb

$$\hat{f}(k\omega) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\omega} c_k = \frac{T}{\sqrt{2\pi}} c_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-ik\omega t} dt .$$

Mit $T \rightarrow \infty$ und, wenn wir $k\omega$ durch ω ersetzen, ist

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt . \quad (28)$$

$\hat{f}(\omega)$ heißt *Fourier-Transformierte* zu $f(t)$.

Die Reihe in (27) ist eine Riemannsche Summe (vgl. Abschnitt 4.1) zur Funktion $\hat{f}(x) e^{ixt}$ mit Zwischenstellen in $x = k\omega$. Die Breite der einzelnen Intervalle der betrachteten Zerlegung ist gerade ω .

Wegen $\omega = \frac{2\pi}{T}$ haben wir $T \rightarrow \infty \iff \omega \rightarrow 0$. Die Zerlegung wird also immer feiner und wir erhalten das *Fourier-Integral*

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

Die Koeffizienten c_k geben (bei den periodischen Funktionen) die Amplituden der Oberschwingungen mit Frequenz $k\omega$ an. Analog gibt die Fourier-Transformierte $\hat{f}(\omega)$ die Amplitude der Frequenz ω an und stellt das *Frequenzspektrum* von f dar.

In der Praxis bedeutet das: während $f(t)$ die Funktion, z.B. ein Signal, in Abhängigkeit von der Zeit t angibt (“Zeitdomäne”), stellt die Fourier-Transformierte in (28) das Signal in Abhängigkeit von den Frequenzen ω dar (“Frequenzdomäne”).

7.0.2 Beispiel Betrachten wir eine Funktion $f(t)$, die z.B. ein gemessenes Signal darstellt, und die zugehörige Fourier-Transformierte $\hat{f}(\omega)$ (Abb. 49).

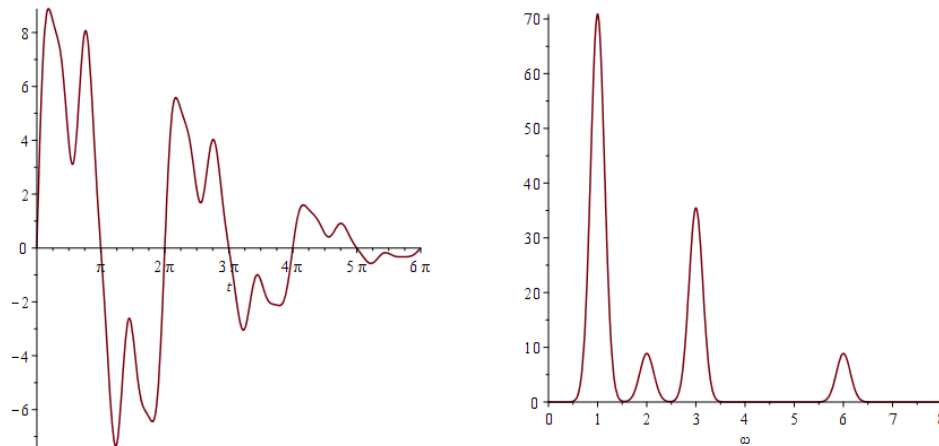


Abbildung 49: Signal $f(t)$ und zugehörige Fouriertransformierte $|\hat{f}(\omega)|$

Man erkennt an der Fourier-Transformierten aus welchen Frequenzen sich das Signal zusammensetzt: Offenbar treten neben der Grundfrequenz ω (hier $\omega = 1$) die Oberschwingungen $2\omega, 3\omega$ und 6ω auf.

Tatsächlich ist im Beispiel aus Abb. 49

$$f(t) = (8 \sin t + \sin(2t) + 4 \sin(3t) + \sin(6t)) \cdot e^{-t^2/100}.$$

Auch die Amplituden der einzelnen Frequenzen sind im Graph von $\hat{f}(\omega)$ gut zu erkennen.

Inhaltsverzeichnis

1	Zahlen	2
1.1	Zahlmengen	2
1.2	Komplexe Zahlen	3
1.3	Rechnen mit komplexen Zahlen	3
1.4	Die Gaußsche Zahlenebene	5
1.5	Potenzen, Wurzeln und Logarithmen	5
1.6	Summen	7
1.7	Der Betrag	7
1.8	Folgen	9
1.9	Konvergenz	10
1.10	Konvergenz- und Divergenzkriterien	13
1.11	Die Eulersche Zahl	15
2	Funktionen	18
2.1	Funktionen und Graphen	18
2.2	Wichtige Funktionen	19
2.3	Polarkoordinaten	25
2.4	Die komplexe Exponentialfunktion	26
2.5	Komplexe Wurzeln	27
2.6	Grenzwerte von Funktionen	29
2.7	Stetigkeit	31
2.8	Umkehrfunktionen	32
2.9	Logarithmische Skalen	35
3	Differenzialrechnung	38
3.1	Differenzierbarkeit	38
3.2	Ableitungsregeln	40
3.3	Extremwerte	43
3.4	Die Regeln von de l'Hospital	46
3.5	Das Newton-Verfahren	47

4	Integralrechnung	51
4.1	Integrierbarkeit	51
4.2	Rechnen mit Integralen	54
4.3	Integral- und Differenzialrechnung	54
4.4	Partielle Integration	58
4.5	Substitutionsregel	59
4.6	Uneigentliche Integrale	62
4.7	Integration rationaler Funktionen	65
4.8	Exkurs: Nennerpolynome mit nicht-reellen Nullstellen	69
5	Reihen	71
5.1	Summen und Reihen	71
5.2	Konvergenzkriterien	74
5.3	Potenzreihen	77
5.4	Approximation von Funktionen	79
5.5	Taylor-Reihen	81
6	Gewöhnliche Differenzialgleichungen	83
6.1	Bezeichnungen	83
6.2	Richtungsfelder	84
6.3	Elementare Lösungsverfahren	84
6.4	Autonome Differenzialgleichungen	86
6.5	Differenzialgleichungen mit getrennten Variablen	88
6.6	Lineare Differenzialgleichungen	89
7	Exkurs: Fourier-Reihen	92