5.4 Approximation von Funktionen

Potenzreihen stellen nach den Ergebnissen des letzten Abschnitts also Funktionen dar. Wie wir nun sehen werden, können aber auch oft umgekehrt Funktionen als Potenzreihen dargestellt werden. Da Potenzreihen recht einfache Objekte sind, kann das sehr nützlich sein.

Bevor wir zu einer gegebenen Funktion die sie darstellende Potenzreihe konstruieren können, untersuchen wir zuerst die Approximation einer Funktion durch ein Polynom. Die Idee dahinter: je höher der Grad des Polynoms, desto genauer soll die Funktion approximiert werden. Wird der Grad „unendlich hoch“, wird aus den Polynomen eine Potenzreihe und diese könnte dann die gleichen Werte wie die Funktion haben.

5.4.1 Bemerkung Der Einfachheit halber formuliere ich diese Überlegungen nur in den reellen Zahlen. Im Prinzip funktioniert das Folgende auch im Komplexen.

5.4.2 Definition Sei $n \in \mathbb{N}_0$ und sei f auf $[a, b]$ n-mal differenzierbar. Sei weiter $x_0 \in [a, b]$. Dann heißt das Polynom

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

n-tes Taylor-Polynom von f zum *Entwicklungspunkt* x_0.

Tatsächlich sind diese Polynome zur Approximation von Funktionen geeignet:

5.4.3 Beispiel Betrachten wir $f(x) = \ln x$ und als Entwicklungspunkt $x_0 = 1$.

Offensichtlich ist $f'(x) = \frac{1}{x}$ und $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
T_0(x) &= \frac{f(1)}{0!}(x-1)^0 = \ln 1 = 0 \\
T_1(x) &= T_0(x) + \frac{f'(1)}{1!}(x-1)^1 = x - 1 \\
T_2(x) &= T_1(x) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 = x - 1 - \frac{1}{2}(x-1)^2 = x - 1 - \frac{1}{2}(x^2 - 2x + 1) \\
&= -\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{3}{2} \\
&\text{usw.}
\end{aligned}$$

In der Nähe von x_0 ist dies tatsächlich eine gute Näherung an $f(x)$:

$$\ln(1.1) \approx 0.09531 \qquad \text{und} \qquad \begin{aligned} T_0(1.1) &= 0 \\ T_1(1.1) &= 0.1 \\ T_2(1.1) &= 0.095 \end{aligned}$$

Bereits das zweite Taylorpolynom liefert den Wert $\ln(1.1)$ also auf drei Nachkommastellen. In größerer Entfernung vom Entwicklungspunkt wird die Näherung aber schlechter:

$$\ln(1.9) \approx 0.64185 \qquad \text{und} \qquad \begin{aligned} T_0(1.9) &= 0 \\ T_1(1.9) &= 0.9 \\ T_2(1.9) &= 0.495 \end{aligned}$$

Diese Beobachtung ist typisch: In der Nähe des Entwicklungspunkts sind Taylorpolynome oft schon für kleine n eine gute Näherung. Je weiter wir uns von x_0 entfernen, desto schlechter wird die Näherung. n muss dann erhöht werden, um eine bessere Approximation zu erhalten.

Auskunft über die Genauigkeit der Approximation gibt

5.4.4 Satz (Taylor-Formel) Sei f in $[a,b]$ $(n+1)$-mal differenzierbar, wobei $f^{(n+1)}$ stetig auf $[a,b]$ sei. Weiter sei $M_n \geq |f^{(n+1)}(x)|$ für alle $x \in [a,b]$. Mit $x_0 \in |a,b]$ gilt für alle $x \in [a,b]$

$$|f(x) - T_n(x)| = R_n(x) \ .$$

Dabei gilt für den Fehler $R_n(x)$ der Approximation

$$R_n(x) \leq \frac{M_n}{(n+1)!} \cdot |x - x_0|^{n+1} \ .$$

5.4.5 Beispiel Betrachten wir $f(x) = \sin x$. Als Entwicklungspunkt wählen wir $x_0 = 0$.

Überlegen wir uns zuerst, wie die Taylor-Polynome von $\sin x$ aussehen: Es gilt

$$f(x) = \sin x \ , \ f'(x) = \cos x \ , \ f''(x) = -\sin x \ , \ f'''(x) = -\cos x \ , \ f^{(4)}(x) = \sin x \ , \ldots$$

und damit $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$, $f'''(0) = -1$, $f^{(4)}(0) = 0$ usw.

Allgemein ist $f^{(2m)}(0) = 0$ und $f^{(2m+1)}(0) = (-1)^m$. Wir haben also

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k = \sum_{m=0}^{n} \frac{f^{(2m+1)}(0)}{(2m+1)!} \cdot x^{2m+1} = \sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} \cdot x^{2m+1} \ . \tag{19}$$

Die ersten Taylor-Polynome des Sinus sind folglich

$$\begin{aligned} T_0(x) &= x \\ T_1(x) &= x - \frac{1}{6}\,x^3 \\ T_2(x) &= x - \frac{1}{6}\,x^3 + \frac{1}{120}\,x^5 \end{aligned}$$

Mit Satz 5.4.4 können wir die Genauigkeit dieser Näherungen berechnen: Da Sinus und Cosinus nur Werte zwischen -1 und 1 annehmen, ist $f^{(n+1)}(x) \leq 1$ für alle n, wir können also $M_n = 1$ verwenden und erhalten

$$R_n(x) \leq \frac{M_n}{(n+1)!} \cdot |x - x_0|^{n+1} = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \ . \tag{20}$$

In der Nähe von $x = 0$ ist bereits das erste Taylorpolynom $T_1(x) = x - \frac{1}{6}\,x^3$ eine recht gute Approximation für den Sinus. Der Fehler beträgt maximal

$$R_1(x) \leq \frac{1}{2}\,|x|^2 \ ,$$

also z.B. für $x = \frac{\pi}{32} = 11,25°$ ist $R_1(x) \leq 0.0048$.

Für noch kleinere Winkel kann sogar $\sin x \approx x$, also die Approximation durch das nullte Taylorpolynom, hinreichend genau sein:

$$\sin(1°) \approx 0.017452406 \qquad T_0(1°) = \frac{2\pi}{360} \approx 0.017453293$$

5.5 Taylor-Reihen

Mit $n \to \infty$ wird aus einem Taylor-Polynom eine Reihe:

5.5.1 Definition $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ heißt *Taylor-Reihe* von $f(x)$ mit Entwicklungspunkt x_0.

Offenbar gilt

5.5.2 Satz Ist $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, dann konvergiert die Taylor-Reihe von $f(x)$ gegen $f(x)$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

Damit können wir also Funktionen durch Potenzreihen darstellen.

5.5.3 Beispiel In (19) haben wir die Taylorpolynome von $f(x) = \sin x$ für den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ bestimmt:

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \cdot x^{2k+1}$$

Wegen (20) gilt

$$R_n(x) \le \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{|x|}{1} \cdot \frac{|x|}{2} \cdot \frac{|x|}{3} \cdots \frac{|x|}{n+1} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

und deshalb ist die *Sinus-Reihe*

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \cdot x^{2k+1} \ .$$

Ganz analog erhält man die *Cosinus-Reihe*

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \cdot x^{2k} \ .$$

Die Sinus- und die Cosinusreihe konvergieren nicht nur für alle $x \in \mathbb{R}$, sondern für alle komplexen Zahlen. Dies verwendet man, um *komplexe* Sinus- und Cosinusfunktionen zu definieren:

5.5.4 Definition Für alle komplexen Zahlen z ist

$$\sin z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\, z^{2k+1} \qquad \text{und} \qquad \cos z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\, z^{2k}$$

Eine der wichtigsten Reihen-Entwicklungen ist die Darstellung der Exponentialfunktion durch die *Exponentialreihe*:

Betrachten wir $f(x) = e^x$ mit dem Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

Es ist $f^{(k)}(x) = e^x$ und damit $f^{(k)}(x_0) = 1$ für alle k. Die Taylorpolynome von e^x zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ sind also

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\, x^k \ .$$

Für $n \to \infty$ konvergiert auch diese Reihe nicht nur für alle reellen, sondern auch für alle komplexen Zahlen und wir erhalten

5.5.5 Satz (Exponentialreihe) Für alle $z \in \mathbb{C}$ ist die Taylor-Reihe der Exponentialfunktion konvergent und es gilt

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\, z^k \ .$$

6 Gewöhnliche Differenzialgleichungen

6.1 Bezeichnungen

Betrachten wir folgende Situation: $n(t)$ sei die Anzahl der Atome in einer radioaktiven Probe zum Zeitpunkt t. Durch den Zerfall ändert sich diese Zahl, die Ableitung $n'(t)$ gibt bekanntlich diese Veränderung an.

Diese Veränderung ist proportional zur jeweiligen Zahl der Atome $n(t)$, mit einer Substanz-spezifischen Konstanten $k \geq 0$ gilt also

$$n'(t) = -k \cdot n(t) \ . \tag{21}$$

Unsere Aufgabe besteht nun darin, $n(t)$ zu bestimmen, also eine Funktion zu finden, die die Gleichung (21) erfüllt.

Eine Gleichung, wie beispielsweise (21), in der neben einer unbekannten Funktion auch deren Ableitung auftritt, heißt *Differenzialgleichung*. Wenn es sich wie in (21) um die erste Ableitung handelt, spricht man von einer Differenzialgleichung *erster Ordnung*, allgemein handelt es sich um eine Differenzialgleichung *n-ter Ordnung*, wenn höhere Ableitungen bis zur n-ten Ordnung auftreten.

Die gesuchte Funktion, die die Differenzialgleichung erfüllt, heißt *Lösung* der Differenzialgleichung.

Wenn die gesuchte Funktion von mehreren Variablen abhängt, können auch sog. *partielle Ableitungen* auftreten, die wir in Teil II dieser Vorlesung kennen lernen werden. In einem solchen Fall handelt es sich um eine *partielle Differenzialgleichung*, sonst um eine *gewöhnliche*.

Wir werden uns an dieser Stelle nur mit gewöhnlichen Differenzialgleichungen erster Ordnung befassen.

6.1.1 Notation Die gesuchte Funktion wird meist $y(x)$ genannt und zur Abkürzung wird „(x)“ hinter y, y',... einfach weggelassen. Aus (21) wird also

$$y' = -ky \ .$$

Allgemein kann man eine gewöhnliche Differenzialgleichung erster Ordnung in der Form

$$y' = f(x, y)$$

schreiben.

6.1.2 Beispiel Eine Lösung der Differenzialgleichung $y' = -2y$ ist $y(x) = e^{-2x}$, denn $y'(x) = -2e^{-2x} = -2y(x)$.

Auch $y(x) = 2e^{-2x}$ oder $y(x) = -e^{-2x}$ sind Lösungen der Differenzialgleichung, wie man leicht nachrechnet.

Wie wir sehen, gibt es im Allgemeinen mehrere Lösungen einer Differenzialgleichung, man spricht dann von einer *Lösungsschar*.