5.1.4 Beispiele **(1)** $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k = 1 - 1 + 1 - 1 \pm \cdots = ?$

Die Partialsummenfolge lautet hier $1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots$, diese Folge, und damit auch die Reihe, ist divergent.

(2) $\sum_{k=1}^{\infty} k = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots$

entspricht der Partialsummenfolge $1, 3, 6, 10, 15, \ldots$

Diese Folge divergiert gegen Unendlich, es gilt also $\sum_{k=1}^{\infty} k = \infty$.

(3) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k-1)k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \cdots = ?$

Es ist $\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = \frac{k-(k-1)}{(k-1)k} = \frac{1}{(k-1)k}$ und daher gilt für die Partialsummen

$$\begin{aligned} s_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1)k} &= \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) \\ &= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm \cdots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \\ &= 1 - \frac{1}{n} \ . \end{aligned} \tag{18}$$

Damit ist

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k-1)k} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1)k} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1 \ .$$

Die Reihe ist also konvergent und konvergiert gegen den Wert 1.

(4) Wie wir dies auch von Folgen kennen, ist die Berechnung des Wertes einer Reihe oft sehr viel schwieriger, als „nur“ zu entscheiden, ob die Reihe konvergiert oder nicht.

Betrachten wir $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$: Da alle Summanden $\frac{1}{k^2}$ positiv sind, gilt für die Partialsummen $s_{n+1} > s_n$, die Folge (s_n) ist also streng monoton wachsend.

Weiter ist nach (18)

$$\begin{aligned} s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} &= 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \cdot k} \\ &\le 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1)k} \\ &= 1 + 1 - \frac{1}{n} \\ &< 2 \end{aligned}$$

(s_n) ist also auch nach oben beschränkt. Nach dem Monotonieprinzip (Satz 1.10.3) folgt daher:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \quad \text{ist konvergent.}$$

Wir wissen nun also, dass diese Reihe gegen einen Wert konvergiert, welchen Wert die Reihe hat, können wir aber nicht sagen.[6]

[6] Mit Methoden, die über den Stoff dieser Veranstaltung hinausgehen, kann man $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ zeigen.

Obwohl unendlich viele positive Werte addiert werden, wächst die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ also nicht „ins Unendliche“. Möglich ist das nur, weil die addierten Werte immer kleiner werden, die Summanden also gegen Null konvergieren:

5.1.5 Satz Konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, so gilt $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$.

Dieser Satz gibt uns ein Kriterium, wann eine Reihe *nicht* konvergiert:

Ist $\lim_{k\to\infty} a_k \neq 0$ oder divergiert die Folge der Summanden (a_k), dann ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergent.

5.1.6 Beispiel Eine oft betrachtete Reihe ist die *geometrische Reihe* $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ für ein $z \in \mathbb{C}$.

1. Fall: $|z| \geq 1$
Wie wir in 1.9.5 (3) gesehen haben, konvergiert (z^k) nicht oder nicht gegen 0, wenn $|z| \geq 1$. Die geometrische Reihe ist also divergent für $|z| \geq 1$.

2. Fall: $|z| < 1$
Nach Satz 1.6.3 über die geometrische Summe ist

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{z^{n+1} - 1}{z - 1} \ .$$

Da $\lim_{k\to\infty} z^k = 0$ für $|z| < 1$, folgt also

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} z^k = \lim_{n\to\infty} \frac{z^{n+1} - 1}{z - 1} = \frac{-1}{z - 1} = \frac{1}{1 - z} \ .$$

Zusammenfassend gilt also:

Die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ ist divergent für $|z| \geq 1$ und konvergiert für $|z| < 1$ gegen $\frac{1}{1-z}$.

Satz 5.1.5 ist kein Kriterium für die Konvergenz einer Reihe: Auch, wenn die Summanden gegen 0 konvergieren, kann die Reihe divergieren.

5.1.7 Beispiel Eine der wichtigsten Reihen ist die *harmonische Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$.

Wählen wir, um die folgende Rechnung etwas zu vereinfachen, eine ganze Zahl m so, dass m die größte Zahl mit $2^m \leq n$ ist. Mit $n \to \infty$ gilt offensichtlich auch $m \to \infty$. Für die Partialsummen

gilt

$$\begin{aligned}
s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^m} \underbrace{+ \cdots + \frac{1}{n}}_{\geq 0} \\
&\geq 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{\geq 2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{\geq 4\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{2}} + \cdots\cdots + \underbrace{\frac{1}{2^m}}_{\geq\frac{1}{2}} \\
&\geq 1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2}}_{m\text{-mal}} \\
&= 1 + m \cdot \frac{1}{2} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty \ .
\end{aligned}$$

Die harmonische Reihe ist also divergent (obwohl die Summanden $\frac{1}{k}$ gegen 0 konvergieren).

5.2 Konvergenzkriterien

Wir haben ein Kriterium für Divergenz. Es gibt aber auch einige nützliche Kriterien für die Konvergenz von Reihen:

5.2.1 Satz (Majorantenkriterium) Sei $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergent mit $b_k \in \mathbb{R}$ und $b_k \geq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$.

Ist $|a_k| \leq b_k$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$, dann konvergiert auch $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$.

5.2.2 Beispiel $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{2k^3}$

Für $k \geq 1$ haben wir

$$\left|\frac{k+1}{2k^3}\right| = \frac{k+1}{2k^3} = \frac{k}{2k^3} + \frac{1}{2k^3} = \frac{1}{2k^2} + \frac{1}{2k^3} \leq \frac{1}{2k^2} + \frac{1}{2k^2} = \frac{1}{k^2} \ .$$

Da $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergiert, konvergiert nach dem Majorantenkriterium auch $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k-1}{2k^3}$.

Analog zum Majorantenkriterium für Konvergenz gibt es auch ein Divergenzkriterium:

5.2.3 Satz (Minorantenkriterium) Sei $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ divergent mit $b_k \in \mathbb{R}$ und $b_k \geq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$.

Gilt für reelle Summanden $a_k \geq b_k$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$, so divergiert auch $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$.

5.2.4 Beispiel Betrachten wir $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

Für $k \geq 1$ gilt $k \geq \sqrt{k} \ \Rightarrow \ \frac{1}{k} \leq \frac{1}{\sqrt{k}}$. Da die harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergiert, divergiert nach dem Minorantenkriterium auch $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

Während Majoranten- und Minorantenkriterium oft sehr hilfreich sind, benötigt man zu deren Anwendung aber Reihen zum Vergleich, deren Konvergenzverhalten bereits bekannt ist. Die folgenden Kriterien benötigen keine Vergleichsreihen:

5.2.5 Satz (Quotientenkriterium) Sei $a_k \neq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt:

(1) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert, wenn $\displaystyle\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < 1$,

(2) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ divergiert, wenn $\displaystyle\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| > 1$.

5.2.6 Beispiele **(1)** $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{2^k}$

Für $k \geq 1$ gilt

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{(k+1)\cdot 2^k}{2^{k+1}\cdot k} = \frac{k+1}{2k} = \frac{k}{2k} + \frac{1}{2k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2k} \ .$$

Damit ist

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2k}\right) = \frac{1}{2} < 1 \ ,$$

die Reihe $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{2^k}$ ist nach dem Quotientenkriterium also konvergent.

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^k}{k!}$

Wir haben

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{(k+1)^{k+1}\cdot k!}{(k+1)!\cdot k^k} = \frac{(k+1)^{k+1}}{(k+1)k^k} = \frac{(k+1)^k}{k^k} = \left(\frac{k+1}{k}\right)^k = \left(1+\frac{1}{k}\right)^k \ .$$

Nach Definition 1.11.3 ist

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k = e > 1 \ ,$$

dem Quotientenkriterium zufolge ist $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^k}{k!}$ also divergent.

5.2.7 Satz (Wurzelkriterium)

(1) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert, wenn $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} < 1$

(2) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ divergiert, wenn $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} > 1$

5.2.8 Beispiel $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k}{k+1}\right)^{k^2}$

Es gilt

$$\sqrt[k]{a_k} = \sqrt[k]{\left(\frac{k}{k+1}\right)^{k^2}} = \left(\frac{k}{k+1}\right)^{k} = \left(\left(\frac{k+1}{k}\right)^{k}\right)^{-1} = \left(\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k}\right)^{-1}$$

und damit ist

$$\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|} = \lim_{k\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k}\right)^{-1} = e^{-1} < 1\ .$$

Die Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k}{k+1}\right)^{k^2}$ ist daher nach dem Wurzelkriterium konvergent.

Ein letztes Kriterium gilt nur für einen bestimmten Reihentyp. Reihen der Form $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k$ mit $a_k \in \mathbb{R}$ und $a_k \geq 0$ für alle k heißen *alternierende Reihen*: $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 \pm \cdots$

5.2.9 Satz (Leibniz-Kriterium) Eine alternierende Reihe $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k$ mit $a_k \in \mathbb{R}$ und $a_k \geq 0$ für alle k ist konvergent, wenn

(1) (a_k) monoton fällt und

(2) $\displaystyle\lim_{k\to\infty} a_k = 0$.

5.2.10 Beispiel $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}$

Die Folge $a_n = \dfrac{1}{n}$ ist monoton fallend und es gilt

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k} = 0\ .$$

Nach dem Leibniz-Kriterium ist die Reihe also konvergent.

5.3 Potenzreihen

Ein besonders wichtiger Typ von Reihen ist die Potenzreihe:

5.3.1 Definition Eine Reihe der Form $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ heißt *Potenzreihe.*

5.3.2 Beispiel Mit $z_0 = 0$ und $a_k = 1$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ erhalten wir die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$.

Das Konvergenzverhalten von Potenzreihen hängt, wie bei der geometrischen Reihe, davon ab, welchen Wert z hat. Genauer gilt:

5.3.3 Satz Für jede Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ gibt es ein $R \geq 0$ oder $R = \infty$, so dass die Reihe konvergiert, wenn $|z-z_0| < R$ und divergiert, wenn $|z-z_0| > R$.

5.3.4 Bemerkung Eine Potenzreihe konvergiert folglich im Inneren eines Kreises um z_0 mit Radius R und divergiert außerhalb dieses Kreises. R heißt *Konvergenzradius* der Potenzreihe.

Betrachten wir nur reelle Zahlen, konvergiert die Reihe im *Konvergenzintervall* $]z_0 - R, z_0 + R[$ und ist für $z > z_0 + R$ und für $z < z_0 - R$, divergent.

Ist $R = \infty$, dann konvergiert die Reihe für alle komplexen bzw. reellen Zahlen.

Für $|z - z_0| = R$ kann die Reihe konvergieren oder divergieren. Der Satz macht über diese Fälle keine Aussage.

5.3.5 Beispiel Die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ konvergiert, wie wir bereits berechnet haben, für $|z| < 1$ und divergiert für $|z| \geq 1$. Hier ist also der Konvergenzradius $R = 1$.

Der Konvergenzradius kann in vielen Fällen relativ einfach berechnet werden:

5.3.6 Satz Für eine Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ gilt, sofern die Grenzwerte existieren,

(1) $R = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|$

(2) $R = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}}$

5.3.7 Beispiele **(1)** $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{k^k} z^k$

Hier ist $a_k = \frac{k!}{k^k}$ und $z_0 = 0$.

$$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \lim_{k\to\infty} \frac{k! \cdot (k+1)^{k+1}}{k^k \cdot (k+1)!} = \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)^{k+1}}{k^k(k+1)} = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{k+1}{k}\right)^k$$
$$= \lim_{k\to\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k = e \ ,$$

es ist also $R = e$, die Reihe konvergiert daher für komplexe Zahlen z mit $|x| < e$ und divergiert für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > e$.

(2) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} k \cdot (2z)^k$

Hier haben wir $a_k = k \cdot 2^k$ und $z_0 = 0$.

Wegen $\sqrt[k]{k} = k^{1/k} = e^{\frac{1}{k}\ln k}$ und da nach der Regel von de l'Hospital $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \frac{\ln k}{k} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0$, haben wir

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{k} = \lim_{k\to\infty} e^{\frac{1}{k}\ln k} = e^{\left(\lim\limits_{k\to\infty} \frac{\ln k}{k}\right)} = e^0 = 1 \ .$$

Damit gilt dann

$$R = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{k \cdot 2^k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{k} \cdot \sqrt[k]{2^k}} = \frac{1}{2} \ .$$

Die Reihe konvergiert also in einem Kreis um 0 mit Radius $\frac{1}{2}$.

Potenzreihen konvergieren also in einem Kreis bzw. Intervall um z_0. In diesen Bereichen stellt die Potenzreihe daher eine Funktion dar:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \ .$$

Für die Eigenschaften einer solchen Funktion gilt:

5.3.8 Satz Sei[7] $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ eine durch eine Potenzreihe gegebene Funktion mit Konvergenzradius $R > 0$. Dann gilt:

(1) (*gliedweise Differenziation*) f ist differenzierbar (und damit auch stetig) im Konvergenzbereich mit

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(a_k (x - x_0)^k\right)' = \sum_{k=\mathbf{1}}^{\infty} a_k \cdot k (x - x_0)^{k-1} \ .$$

(2) (*gliedweise Integration*) f ist integrierbar und hat Stammfunktionen

$$\int f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int a_k (x - x_0)^k \,dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} (x - x_0)^{k+1} + C \qquad \text{für } C \in \mathbb{R}.$$

Die Potenzreihen $f'(z)$ und $\int f(x)\,dx$ haben ebenfalls den Konvergenzradius R.

[7] Wir hatten Integrale nur im Reellen betrachtet, daher formuliere ich dies auch nur für reelle Potenzreihen. Die Aussagen gelten aber mutatis mutandis auch in $\mathbb{C}$.