Damit erhalten wir also, da $x'(t) = \dfrac{1}{2\sqrt{t-1}}$,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx &= \int_1^2 \frac{x(t)}{\sqrt{1+(x(t))^2}} \cdot x'(t)\,dt \\
&= \int_1^2 \frac{\sqrt{t-1}}{\sqrt{1+\left(\sqrt{t-1}\right)^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{t-1}}\,dt \\
&= \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt \\
&= \frac{1}{2}\int_1^2 t^{-1/2}\,dt \\
&= t^{1/2}\Big|_1^2 \\
&= \sqrt{2}-1
\end{aligned}$$

(3) Wir wollen die Fläche eines Kreises mit Radius 1 bestimmen.

Wie wir wissen, ist der Graph der Funktion $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ ein Halbkreis mit Radius 1 (vgl. Abb. 6 auf Seite 18). Wir müssen also

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$$

berechnen. Hier müssen wir bei der Wahl der Substitution etwas „kreativer“ sein. Nach Satz 2.2.3 ist $(\sin t)^2 + (\cos t)^2 = 1$, also $1-(\sin t)^2 = (\cos t)^2$. Um den Integranden zu vereinfachen, verwenden wir daher die Substitution $x(t) = \sin t$.

Es ist dann $x'(t) = \cos t$ sowie $x\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$ und $x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, also unter Verwendung von Gleichung (10) auf Seite 59

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\,dx &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \underbrace{\sqrt{1-(\sin t)^2}}_{=\sqrt{(\cos t)^2}} \cdot \cos t\,dt \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos t)^2\,dt \\
&= \frac{1}{2}(\sin t \cdot \cos t + t)\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\ .
\end{aligned}$$

Die Fläche eines Kreises mit Radius 1 ist das Doppelte dieses Halbkreises, also π.

4.6 Uneigentliche Integrale

Integrale $\int_a^b f(x)\,dx$ können wir bislang nur berechnen, wenn der Integrand $f(x)$ beschränkt und das Integrationsintervall $[a,b]$ endlich ist. Andernfalls würde unsere Definition des Integrals zu keinem Ergebnis führen, da die Riemannschen Summen unter Umständen unendlich groß würden.

Durch Grenzwerte können wir die bisherige Definition aber verallgemeinern. Betrachten wir zuerst den Fall, dass der Integrand an einem Ende des Integrationsintervalls nicht definiert ist:

4.6.1 Definition Sei f integrierbar in jedem Intervall $[a,b]$ mit $b < B$. Existiert der Grenzwert

$$\lim_{b\to B}\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^B f(x)\,dx\ ,$$

dann heißt f in $[a,B]$ *uneigentlich integrierbar*.

4.6.2 Bemerkung Ganz analog wird $\int_A^b f(x)\,dx = \lim_{a\to A}\int_a^b f(x)\,dx$ für Funktionen f, die in jedem $[a,b]$ mit $a > A$ integrierbar sind, definiert.

4.6.3 Bemerkung $f(B)$ bzw. $f(A)$ muss hier gar nicht definiert sein. Über $[a,B]$ bzw. $[A,b]$ sind die Funktionen dann nicht (*eigentlich*) integrierbar, sondern nur uneigentlich integrierbar.

4.6.4 Beispiele **(1)** $\int_0^1 \ln x\,dx$

Der Integrand ist in 0 nicht definiert. $\ln x$ ist aber stetig und damit integrierbar in $[a,1]$ für $a > 0$. Die Stammfunktion von $\ln x$ haben wir auf Seite 58 bereits berechnet, wir haben also für $a > 0$

$$\begin{aligned}\int_a^1 \ln x\,dx &= (x\ln x - x)\Big|_a^1\\ &= 0 - 1 - a\ln a + a\ ,\end{aligned}$$

also unter Verwendung der Regel von de l'Hospital

$$\begin{aligned}\int_0^1 \ln x\,dx &= \lim_{a\to 0}(-1 - a\ln a + a)\\ &= -1 - \lim_{a\to 0}\frac{\ln a}{\frac{1}{a}} + 0\\ &= -1 - \lim_{a\to 0}\frac{\frac{1}{a}}{-\frac{1}{a^2}}\\ &= -1 - \lim_{a\to 0}\left(-\frac{a^2}{a}\right)\\ &= -1 - \lim_{a\to 0}(-a)\\ &= -1\end{aligned}$$

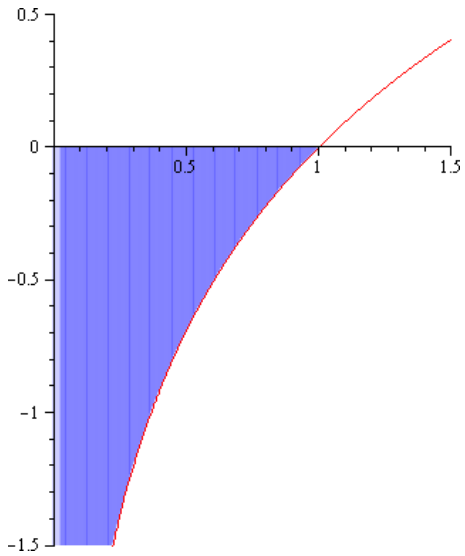

Abbildung 41: $\int \ln x \, dx$: Die markierte Fläche hat den Inhalt 1.

(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}\, dx$

Auch hier ist der Integrand in 0 nicht definiert aber für $a > 0$ integrierbar. Für $a > 0$ gilt

$$\int_a^1 \frac{1}{x}\, dx = \ln|x|\Big|_a^1 = 0 - \ln|a| \ .$$

Da aber $\lim\limits_{a\to 0}(-\ln|a|) = \infty$, existiert $\int_0^1 \frac{1}{x}\, dx$ nicht. $\frac{1}{x}$ ist also in $[0,1]$ auch nicht uneigentlich integrierbar.

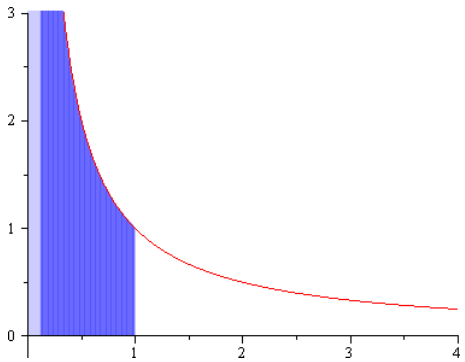

Abbildung 42: $\int \frac{1}{x}\, dx$: Die markierte Fläche ist unendlich groß.

So, wie wir den Integralbegriff auf Funktionen erweitert haben, die nicht beschränkt oder auf den Integralgerenzen nicht definiert sind, können wir ihn auch auf unbeschränkte Integrationsintervalle ausdehnen:

4.6.5 Definition Sei f uneigentlich integrierbar in jedem Intervall $[a, b]$ mit $a < b < \infty$. Existiert der Grenzwert

$$\lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^\infty f(x)\,dx \ ,$$

dann heißt f *uneigentlich integrierbar* in $[a, \infty[$.

4.6.6 Bemerkung Analog wird $\displaystyle\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)\,dx$ definiert.

4.6.7 Bemerkung Ist eine Funktion f für ein $c \in \mathbb{R}$ sowohl in $]-\infty, c]$ als auch in $[c, \infty[$ uneigentlich integrierbar, so schreiben wir

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \int_{-\infty}^c f(x)\,dx + \int_c^\infty f(x)\,dx \ .$$

4.6.8 Beispiele **(1)** $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$

Für $b > 1$ gilt

$$\int_1^b \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\bigg|_1^b = -\frac{1}{b} + 1 = 1 - \frac{1}{b}$$

und damit

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty} \left(1 - \frac{1}{b}\right) = 1 \ .$$

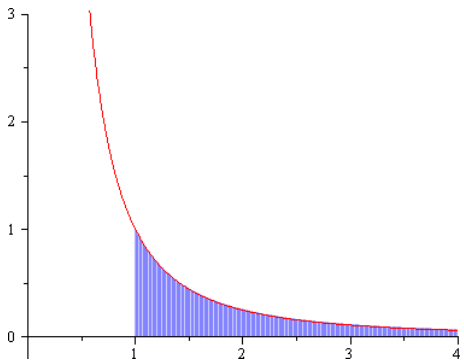

Abbildung 43: $\int \frac{1}{x^2}\,dx$: Die markierte Fläche ist endlich, der Flächeninhalt ist 1.

(2) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$

Für $b > 1$ gilt hier

$$\int_1^b \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|\Big|_1^b = \ln b - \ln 1 = \ln b$$

und wegen

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x}\,dx = \lim_{b\to\infty} \ln b = \infty$$

existiert $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$ nicht.

4.7 Integration rationaler Funktionen

Polynome $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ sind recht leicht zu integrieren. Wir verwenden $\int x^n\,dx = \frac{x^{n-1}}{n-1}$ und die Summenformel und erhalten

$$\int (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n)\,dx = a_0x + \frac{a_1}{2}x^2 + \frac{a_2}{3}x^3 + \cdots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + C\ .$$

Deutlich schwieriger ist die Integration von rationalen Funktionen, also Funktionen $\frac{P(x)}{Q(x)}$, wobei P und Q Polynome sind. Gerade solche Integrale treten z.B. in der theoretischen Chemie auf, wir sollten uns also damit befassen.

Es wird sich zeigen, dass wir dabei mehrere Fälle unterscheiden müssen.

Unsere erste Überlegung gilt dem Grad von Zähler- und Nenner-Polynom. Als *Grad* eines Polynoms bezeichnet man dabei die höchste Potenz, die in dem Polynom auftritt:

4.7.1 Definition Sei $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ ein Polynom mit $a_n \neq 0$, dann ist n der *Grad* von P:

$$\deg(P) = n$$

Betrachten wir zuerst rationale Funktionen $\frac{P(x)}{Q(x)}$, bei denen der Grad des Nenners nicht größer ist als der des Zählers:

Fall 1: $\deg(P) \geq \deg(Q)$

Wir rechnen in diesem Fall den Integranden in ein Polynom und einen leichter zu integrierenden Rest um. Das Verfahren, das wir hierzu benutzen, ist jedem Schüler wohlbekannt: schriftliche Division.

Schauen wir uns eine schriftliche Division näher an:

$$\begin{array}{l} 74:3 = 24 + \frac{2}{3} \\ \underline{-6} \\ 14 \\ \underline{-12} \\ 2 \end{array}$$

Statt Zahlen werden wir nun Polynome verwenden, das Rechenverfahren ist aber das gleiche. An die Stelle der Ziffern treten die Potenzen von x mit ihren Koeffizienten:

$$\begin{array}{l} (2x^3 \ -x^2-4x-3) : (x^2-x-2) = 2x+1+\frac{x-1}{x^2-x-2} \\ \underline{-(2x^3-2x^2-4x)} \\ \qquad\quad x^2 \quad -3 \\ \quad \underline{-(x^2 \ -x-2)} \\ \qquad\qquad x-1 \end{array}$$

Wie wir sehen, rechnen wir durch diese *Polynomdivision* eine rationale Funktion mit $\deg(P) \geq \deg(Q)$ um in ein Polynom und eine rationale Funktion mit $\deg(P) < \deg(Q)$:

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^3-x^2-4x-3}{x^2-x-2}\,dx &= \int (2x+1)\,dx + \int \frac{x-1}{x^2-x-2}\,dx \\ &= x^2+x+\int \frac{x-1}{x^2-x-2}\,dx\ . \end{aligned} \tag{13}$$

Mit solchen rationalen Funktionen, bei denen der Grad des Zählers geringer ist als der Grad des Nenners befassen wir uns im Folgenden.

Fall 2: $\deg(P) < \deg(Q)$

1. Schritt: Zerlegung des Nenners in Linearfaktoren.

Betrachten wir das Nennerpolynom $Q(x)$ und nehmen an, es hätte eine Nullstelle in $x = b_1$. Wir können dann einen *Linearfaktor* $(x - b_1)$ abspalten und übrig bleibt ein Polynom Q_1, dessen Grad um 1 geringer ist:

$$Q(x) = (x-b_1)Q_1(x)\ .$$

$Q_1(x)$ erhalten wir z.B. durch eine Polynomdivision $\frac{Q(x)}{x-b_1} = Q_1(x)$.

Dies können wir natürlich wiederholen, indem wir nun von $Q_1(x)$ eine Nullstelle $x = b_2$ abspalten usw.:

$$Q(x) = (x-b_1)(x-b_2)\cdots(x-b_k)Q_k(x)\ .$$

4.7.2 Beispiel Sei

$$Q(x) = x^3-3x+2\ .$$

Wir finden (z.B. durch Probieren oder weil wir dies aus anderen Überlegungen wissen) eine Nullstelle in $x = 1$ und erhalten (führen Sie die Polynomdivision einmal selbst zur Übung durch)

$$x^3-3x+2 = (x-1)(x^2+x-2)$$

x^2+x-2 hat (p-q-Formel) Nullstellen in 1 und -2:

$$\begin{aligned} Q(x) &= (x-1)(x-1)(x+2) \\ &= (x-1)^2(x+2) \end{aligned}$$

Auf dieser Zerlegung in Linearfaktoren basiert nun die Integration von rationalen Funktionen. Betrachten wir ein Beispiel:

$$\int \frac{9x+9}{x^3-3x+2}\,dx = ?$$

Hier ist also $P(x) = 9x+9$ und $Q(x) = x^3-3x+2$.

Wir zerlegen $Q(x)$ in k verschiedene Linearfaktoren:

$$Q(x) = (x-b_1)^{n_1}(x-b_2)^{n_2}\cdots(x-b_k)^{n_k} \ .$$

In unserem Beispiel hat $Q(x) = x^3 - 3x + 2$ die Linearfaktorzerlegung (s.o.)

$$x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2(x+2) \ ,$$

also $b_1 = 1$, $n_1 = 2$ und $b_2 = -2$, $n_2 = 1$.

2. Schritt: Partialbruchzerlegung.

Wir stellen nun $\frac{P(x)}{Q(x)}$ durch mehrere, einfachere Brüche dar. Dazu machen wir einen sog. „Ansatz“, der zeigt, wie diese einfacheren Brüche aufgebaut sein sollen.

Für jeden der verschiedenen Linearfaktoren $(x-b)^n$ addieren wir Summanden der Gestalt

$$\frac{A_1}{x-b} + \frac{A_2}{(x-b)^2} + \cdots + \frac{A_n}{(x-b)^n} \ . \tag{14}$$

In unserem Beispiel haben wir die verschiedenen Linearfaktoren $(x-1)^2$ und $(x+2)$. Daher addieren wir für $(x-1)^2$ die Summanden

$$\frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2}$$

und für $(x+2)$ den Summanden

$$\frac{A_3}{x+2} \ .$$

Insgesamt haben wir den Ansatz

$$\begin{aligned}
\frac{9x+9}{x^3-3x+2} &= \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_3}{x+2} \\
&= \frac{A_1(x-1)(x+2) + A_2(x+2) + A_3(x-1)^2}{(x-1)^2(x+2)} \\
&= \frac{(A_1+A_3)x^2 + (A_1+A_2-2A_3)x - 2A_1 + 2A_2 + A_3}{(x-1)^2(x+2)}
\end{aligned}$$

3. Schritt: Koeffizientenvergleich.

Da die Nenner gleich sind, müssen auch die Zähler gleich sein, deshalb gilt

$$9x + 9 = 0x^2 + 9x + 9 = (A_1+A_3)x^2 + (A_1+A_2-2A_3)x - 2A_1 + 2A_2 + A_3 \ ,$$

also, wenn wir die Koeffizienten vergleichen,

$$\begin{aligned}
0 &= A_1 + A_3 \\
9 &= A_1 + A_2 - 2A_3 \\
9 &= -2A_1 + 2A_2 + A_3
\end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem können wir z.B. lösen, indem wir aus der ersten Gleichung $A_3 = -A_1$ folgern und dies in die zweite Gleichung einsetzen. Die zweite Gleichung lautet dann

$$9 = A_1 + A_2 - 2(-A_1) \qquad \Rightarrow \qquad A_2 = 9 - 3A_1 \ .$$

Beide Folgerungen können wir in die dritte Gleichung einsetzen und erhalten

$$9 = -2A_1 + 2(9-3A_1) + (-A_1) \qquad \Rightarrow \qquad A_1 = 1 \ .$$

Damit können wir dann auch A_2 und A_3 berechnen:

$$A_2 = 9 - 3A_1 = 6 \qquad \text{und} \qquad A_3 = -A_1 = -1 \ .$$

4. Schritt: Berechnung des Integrals.

Nachdem wir $A_1, \ldots, A_n$ kennen, können wir die Werte in den Ansatz einsetzen und damit das gesuchte Integral berechnen. Wir benötigen hierfür nur noch die Stammfunktionen der Summanden in (14). Diese können wir mittels Satz 4.3.10 und der Substitutionsregel integrieren, das Ergebnis lautet zusammengefasst:

4.7.3 Satz Sei b reell und n eine natürliche Zahl. Dann sind die Funktionen $\frac{1}{(x-b)^n}$ integrierbar für $x \neq b$ und es gilt

$$\int \frac{1}{x-b}\,dx = \ln|x-b| + C$$

beziehungsweise

$$\int \frac{1}{(x-b)^n}\,dx = \frac{1}{(1-n)(x-b)^{n-1}} + C \qquad \text{für } n \geq 2.$$

Setzen wir die Ergebnisse des 2. und 3. Schritts zusammen, erhalten wir damit

$$\begin{aligned}
\int \frac{9x+9}{x^3-3x+2}\,dx &= \int \frac{A_1}{x-1}\,dx + \int \frac{A_2}{(x-1)^2}\,dx + \int \frac{A_3}{x+2}\,dx \\
&= \int \frac{1}{x-1}\,dx + 6\int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx - \int \frac{1}{x+2}\,dx \\
&= \ln|x-1| - \frac{6}{x-1} - \ln|x+2| + C
\end{aligned}$$

Betrachten wir als weiteres Beispiel ein uns bereits bekanntes Integral:

4.7.4 Beispiel Wie wir in (13) auf Seite 66 bereits berechnet haben, gilt

$$\int \frac{2x^3-x^2-4x-3}{x^2-x-2}\,dx = x^2 + x + \int \frac{x-1}{x^2-x-2}\,dx\ .$$

Nullstellen des Nenners liegen in

$$\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+2} = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}\ .$$

Der Ansatz lautet also

$$\begin{aligned}
\frac{x-1}{x^2-x-2} &= \frac{A_1}{x-2} + \frac{A_2}{x+1} \\
&= \frac{A_1(x+1) + A_2(x-2)}{(x-2)(x+1)} \\
&= \frac{(A_1+A_2)x + (A_1-2A_2)}{(x-2)(x+1)}
\end{aligned} \tag{15}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
A_1 + A_2 &= 1 \\
A_1 - 2A_2 &= -1
\end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem können wir wie oben durch Einsetzen lösen, um A_1 und A_2 zu berechnen:

Aus $A_1 + A_2 = 1$ folgt

$$A_1 = 1 - A_2$$

und damit ergibt $A_1 - 2A_2 = -1$

$$1 - A_2 - 2A_2 = -1 \quad \Leftrightarrow \quad 2 = 3A_2 \quad \Leftrightarrow \quad A_2 = \frac{2}{3}$$

woraus

$$A_1 = \frac{1}{3}$$

folgt.

Damit haben wir nun

$$\begin{aligned}\int \frac{x-1}{x^2-x-2}\,dx &= \int \frac{A_1}{x-2}\,dx + \int \frac{A_2}{x+1}\,dx \\ &= \frac{1}{3}\int \frac{1}{x-2}\,dx + \frac{2}{3}\int \frac{1}{x+1}\,dx \\ &= \frac{1}{3}\ln|x-2| + \frac{2}{3}\ln|x+1| + C\ .\end{aligned}$$

4.8 Exkurs: Nennerpolynome mit nicht-reellen Nullstellen

Es ist leider möglich, dass $Q(x)$ nicht vollständig in Linearfaktoren zerfällt, sondern Polynome zweiten Grades als Faktoren übrig bleiben:

4.8.1 Beispiel

$$\begin{aligned}x^4 + x^3 - x - 1 &= (x-1)(x^3 + 2x^2 + 2x + 1) \\ &= (x-1)(x+1)(x^2 + x + 1) \qquad (16)\end{aligned}$$

Wie wir mit der p-q-Formel nachrechnen können, hat $x^2 + x + 1$ keine reellen Nullstellen. Eine weitere Zerlegung in Linearfaktoren ist also nicht möglich.

Falls das Nennerpolynom nicht in Linearfaktoren zerfällt, ist die Integration mit mehr Aufwand verbunden. Ich empfehle, in dieser Situation nach Möglichkeit ein Computeralgebra-Programm zur Integration zu verwenden, es geht aber natürlich auch von Hand:

Eventuell vorhandene lineare Faktoren werden wie oben behandelt. Es bleiben Faktoren der Form $(x^2 + px + q)^n$. Für jeden solchen Faktor addieren wir im Ansatz zur Partialbruchzerlegung Summanden der Gestalt

$$\frac{a_1x + b_1}{x^2 + px + q} + \frac{a_2x + b_2}{(x^2 + px + q)^2} + \cdots + \frac{a_nx + b_n}{(x^2 + px + q)^n}\ .$$

Im Beispiel des Polynoms (16) haben wir also den Ansatz

$$\frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x+1} + \frac{A_3x + A_4}{x^2 + x + 1}\ .$$

Neben den Integralen aus Satz 4.7.3 können wir zusätzlich auf die folgenden Typen von Integralen stoßen:

4.8.2 Satz Seien p, q und b reell, $n \in \mathbb{N}$. Hat $x^2 + px + q$ keine reelle Nullstelle, dann gilt

(1) $$\int \frac{1}{x^2+px+q}\,dx = \frac{2}{\sqrt{4q-p^2}} \cdot \arctan\left(\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}\right) + C\ ,$$

(2) $$\int \frac{x+b}{x^2+px+q}\,dx = \frac{\ln|x^2+px+q|}{2} + \left(b-\frac{p}{2}\right)\int \frac{1}{x^2+px+q}\,dx + C\ ,$$

(3) $$\int \frac{1}{(x^2+px+q)^{n+1}}\,dx = \frac{2x+p}{n(4q-p^2)(x^2+px+q)^n} + \frac{4n-2}{n(4q-p^2)}\int \frac{1}{(x^2+px+q)^n}\,dx + C\ ,$$

(4) $$\int \frac{x+b}{(x^2+px+q)^{n+1}}\,dx = -\frac{1}{2n(x^2+px+q)^n} + \left(b-\frac{p}{2}\right)\int \frac{1}{(x^2+px+q)^{n+1}}\,dx + C\ .$$

4.8.3 Beispiel Versuchen wir, $\displaystyle\int \frac{3x^3-x+1}{x^4+x^3-x-1}\,dx$ zu berechnen.

Den Ansatz bei diesem Nenner-Polynom haben wir uns oben bereits überlegt:

$$\begin{aligned}
\frac{3x^3-x+1}{x^4+x^3-x-1} &= \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x+1} + \frac{A_3x+A_4}{x^2+x+1} \\
&= \frac{A_1(x+1)(x^2+x+1) + A_2(x-1)(x^2+x+1) + (A_3x+A_4)(x-1)(x+1)}{x^4+x^3-x-1} \\
&= \frac{A_1(x^3+2x^2+2x+1) + A_2(x^3-1) + (A_3x+A_4)(x^2-1)}{x^4+x^3-x-1} \\
&= \frac{(A_1+A_2+A_3)x^3 + (2A_1+A_4)x^2 + (2A_1-A_3)x + (A_1-A_2-A_4)}{x^4+x^3-x-1}
\end{aligned}$$

Der Koeffizientenvergleich ergibt

$$\begin{aligned}
A_1 + A_2 + A_3 &= 3 \\
2A_1 + A_4 &= 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad A_4 = -2A_1 \\
2A_1 - A_3 &= -1 \qquad \Leftrightarrow \qquad A_3 = 2A_1 + 1 \\
A_1 - A_2 - A_4 &= 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad A_2 = A_1 - A_4 - 1 = 3A_1 - 1
\end{aligned}$$

Setzen wir die letzten drei Zeilen in die erste ein, erhalten wir $A_1 + 3A_1 - 1 + 2A_1 + 1 = 6A_1 = 3$ und damit

$$A_1 = \frac{1}{2}\ , \quad A_2 = \frac{1}{2}\ , \quad A_3 = 2\ , \quad A_4 = -1\ .$$

Also ist

$$\int \frac{3x^3-x+1}{x^4+x^3-x-1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}\,dx + 2\int \frac{x-\frac{1}{2}}{x^2+x+1}\,dx\ . \tag{17}$$

Diese drei Integrale können wir mit den Sätzen 4.7.3 und 4.8.2 ausrechnen:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x-1}\,dx &= \ln|x-1| + C_1 \\
\int \frac{1}{x+1}\,dx &= \ln|x+1| + C_2 \\
\int \frac{x-\frac{1}{2}}{x^2+x+1}\,dx &= \frac{\ln|x^2+x+1|}{2} - \int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx \\
&= \frac{\ln|x^2+x+1|}{2} - \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C_3
\end{aligned}$$

Setzen wir dies in (17) ein, erhalten wir die Stammfunktion

$$\int \frac{3x^3-x+1}{x^4+x^3-x-1}\,dx = \frac{\ln|x-1|}{2} + \frac{\ln|x+1|}{2} + \ln|x^2+x+1| - \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C\ .$$

5 Reihen

5.1 Summen und Reihen

Vereinfacht ausgedrückt, sind *Reihen* Summen unendlich vieler Summanden. Wenn aber unendlich viele Werte addiert werden, kann der Wert dieser Summe auch unendlich groß werden und dadurch gar nicht existieren.

Bei manchen Summen ist ihr Wert, oder sogar die Existenz des Wertes, unklar:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots = ?$$
$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \cdots = ?$$
$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 \pm \cdots = ?$$
$$i^1 + i^2 + i^3 + i^4 + i^5 + \cdots = i - 1 - i + 1 + i + \cdots = ?$$
$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots = ?$$

Bei solchen „unendlichen Summen“ müssen wir also offensichtlich Grenzwerte betrachten, wie wir sie von Folgen bereits kennen:

5.1.1 Definition Die Folge (s_n) der *Partialsummen*

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1 \\ s_2 &= a_1 + a_2 \\ s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ &\vdots \\ s_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \\ &\vdots \end{aligned}$$

heißt *Reihe* über a_k und wird mit $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ bezeichnet. Die Reihe heißt *konvergent* zur Summe S, wenn $\lim_{n\to\infty} s_n = S$, d.h. $\sum_{k=1}^{\infty} a_i = S$. Nicht konvergente Reihen heißen *divergent*.

5.1.2 Bemerkung Die Reihe muss nicht bei $k = 1$, sondern kann bei jeder ganzen Zahl beginnen: Analog zu Definition 5.1.1 definiert man $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$ für $m \in \mathbb{Z}$.

5.1.3 Bemerkung Das Konvergenzverhalten (Konvergenz oder Divergenz) einer Reihe ändert sich nicht, wenn endlich viele Summanden geändert, weggelassen oder hinzugefügt werden. Wenn die Reihe konvergiert, ändert sich lediglich der Wert der Reihe.