3.4 Die Regeln von de l'Hospital

Ableitungen können auch benutzt werden, um Grenzwerte von Funktionen zu berechnen.

3.4.1 Satz (Regel von de l'Hospital, Typ $\frac{0}{0}$) Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ und f und g in $x \neq x_0$ differenzierbar mit $g'(x) \neq 0$ für $x \neq x_0$.

Gilt $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ und $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ und existiert $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, dann existiert auch $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ und es gilt

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \ .$$

Mit diesem Satz können wir also Grenzwerte von Quotienten berechnen, bei denen sowohl Zähler als auch Nenner gegen 0 konvergieren.

3.4.2 Bemerkung Der Satz gilt auch, wenn x_0 durch ∞ oder $-\infty$ ersetzt wird.

3.4.3 Beispiele **(1)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = ?$

Es ist $\lim\limits_{x\to 0} \ln(1+x) = 0$, $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$ und weiter $(\ln(1+x))' = \frac{1}{1+x}$ sowie $(x)' = 1$. Außerdem existiert $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(\ln(1+x))'}{(x)'} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{1+x} = 1$, die Regel von de l'Hospital ist also anwendbar, und wir haben

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(\ln(1+x))'}{(x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+x} = 1 \ .$$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty} x \ln \dfrac{x+1}{x} = ?$

Auf den ersten Blick ist die Regel von de l'Hospital hier nicht anwendbar, da es sich nicht um den Quotienten zweier Funktionen handelt. Wir können die Funktion aber umschreiben:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} x \ln \frac{x+1}{x} &= \lim_{x\to\infty} \frac{\ln \frac{x+1}{x}}{\frac{1}{x}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(1+x^{-1}\right)}{x^{-1}}
\end{aligned}$$

(hier kommt nun die Regel von de l'Hospital zum Einsatz, die Voraussetzungen sind erfüllt)

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{1+x^{-1}} \cdot \left(-x^{-2}\right)}{-x^{-2}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+\underbrace{x^{-1}}_{\to 0}} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Die Regel von de l'Hospital gibt es auch noch in einer anderen Form, wenn nämlich sowohl Zähler als auch Nenner gegen Unendlich divergieren:

3.4.4 Satz (Regel von de l'Hospital, Typ $\frac{\infty}{\infty}$) Sei $x_0 \in \mathbb{R}$. Seien f und g in $x \neq x_0$ differenzierbar mit $g'(x) \neq 0$ für alle $x \neq x_0$.

Gilt[5] $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty$ und existiert $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, dann existiert auch $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ und es gilt

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \ .$$

3.4.5 Bemerkung Auch dieser Satz gilt ebenso, wenn x_0 durch ∞ oder $-\infty$ ersetzt wird.

3.4.6 Beispiel $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\ln x}{x} = ?$

Es ist $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ und $(x)' = 1$, also

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0 \ .$$

3.5 Das Newton-Verfahren

Wie wichtig die Bestimmung von Nullstellen einer Funktion ist, haben wir z.B. bei der Untersuchung von Extremwerten gesehen.

In einigen Fällen, z.B. bei quadratischen Gleichungen ("p-q-Formel"), sind wir in der Lage, die Nullstellen zu berechnen. In allgemeineren Fällen ist die exakte Berechnung der Nullstellen aber oft kaum möglich. Tatsächlich ist man nur in den wenigsten Fällen in der Lage, Nullstellen präzise auszurechnen.

Andererseits ist in der Praxis der mathematischen Anwendungen diese exakte Berechnung oft gar nicht erforderlich. In vielen Fällen genügt eine *numerische Approximation*, d.h. eine näherungsweise Bestimmung.

Intervallhalbierungsmethode

Eine einfache Idee, wie eine solche Approximation im Fall einer stetigen Funktion erfolgen könnte, besteht darin, ein Intervall zu betrachten, an dessen Enden die Funktion unterschiedliche Vorzeichen hat. Offensichtlich muss sich dann irgendwo im Intervall eine Nullstelle befinden.

Nun halbiert man das Intervall und betrachtet das Vorzeichen der Funktion in der Intervallmitte. Man kann nun erkennen, in welcher Hälfte die gesuchte Nullstelle liegen muss und hat die Lage der Nullstelle auf diese Intervallhälfte eingegrenzt.

Das Verfahren wiederholt man nun mit der gefundenen Intervallhälfte so lange, bis man die Nullstelle hinreichend genau lokalisiert hat.

3.5.1 Beispiel Führen wir das Verfahren durch, um eine Nullstelle von

$$f(x) = x^2 - 2x - 8$$

zu suchen. Sei $[a_i, b_i]$ das betrachtete Intervall im i-ten Schritt. Die Intervallmitte ist dann $\frac{a_i + b_i}{2}$.

[5] Hier ist keine Annahme über $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ erforderlich.

Nach evtl. ein wenig Probieren finden wir heraus, dass z.B. das Intervall $[a_0, b_0] = [0, 6]$ unterschiedliche Vorzeichen an den Intervallenden hat:

i	$[a_i, b_i]$	Mitte $\frac{a_i+b_i}{2}$	$f(a_i)$	$f\left(\frac{a_i+b_i}{2}\right)$	$f(b_i)$	Nullstelle in ...
0	$[0, 6]$	3	-8	-5	16	rechter Hälfte
1	$[3, 6]$	4.5	-5	3.25	16	linker Hälfte
2	$[3, 4.5]$	3.75	-5	-1.4375	3.25	rechter Hälfte
3	$[3.75, 4.5]$	4.125	-1.4375	0.765625	3.25	linker Hälfte
4	$[3.75, 4.125]$	3.9375	-1.4375	-0.37109375	0.765625	rechter Hälfte

Wir sehen also, dass eine Nullstelle irgendwo in $[3.9375, 4.125]$ liegen muss. Tatsächlich gibt es eine Nullstelle in 4.

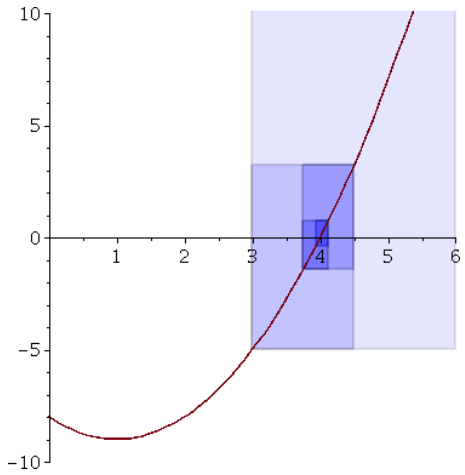

Abbildung 37: Intervallhalbierungsmethode angewandt auf $f(x) = x^2 - 2x - 8$

Auch, wenn das Verfahren bei stetigen Funktionen funktioniert, erkennt man jedoch, dass es nur recht langsam zu einem Ergebnis führt, das z.B. auf mehrere Nachkommastellen genau ist.

Newton-Verfahren

Ist die untersuchte Funktion differenzierbar, können wir Differenzialrechnung nutzen, um Nullstellen zu finden. Die Grundidee ist, dass die Nullstelle einer Geraden sehr leicht berechnet werden kann. Wir ersetzen daher die Funktion durch eine Tangente an $f(x)$ im Punkt $x = x_0$, berechnen die Nullstelle x_1 der Tangenten und betrachten dann die Tangente für $x = x_1$, berechnen deren Nullstelle x_2 usw.

Die Tangente an $f(x)$ in $x = x_0$ ist allgemein gegeben durch

$$t(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \ .$$

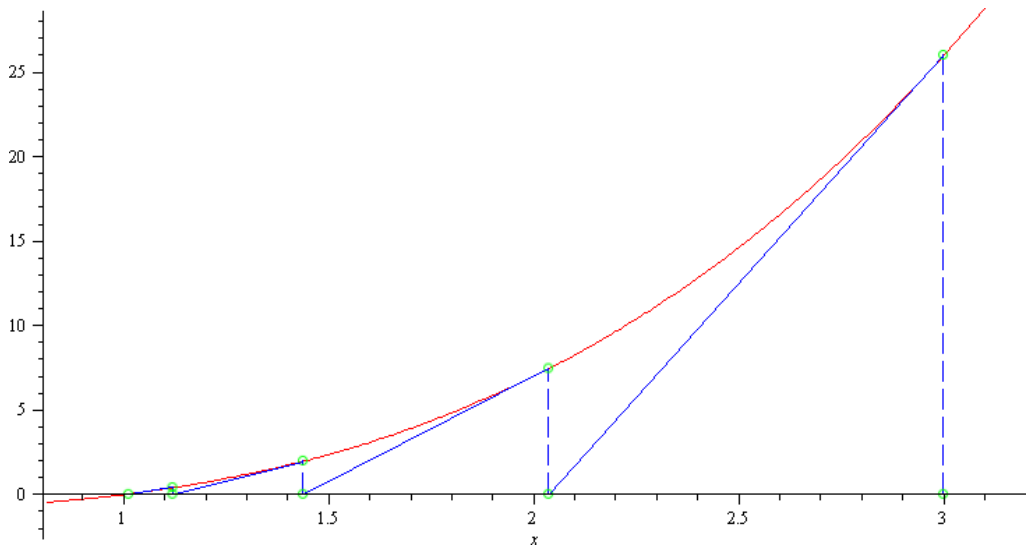

Abbildung 38: Newton-Verfahren für $f(x) = x^3 - 1$ beginnend in $x_0 = 3$

Die Nullstelle hiervon ist, falls $f'(x_0) \neq 0$,

$$\begin{aligned} 0 &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \\ &= f(x_0) - f'(x_0)x_0 + f'(x_0)x \\ \Leftrightarrow \quad f'(x_0)x &= f'(x_0)x_0 - f(x_0) \\ \Leftrightarrow \quad x &= \frac{f'(x_0)x_0 - f(x_0)}{f'(x_0)} \\ &= x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \end{aligned}$$

Diesen Punkt $x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ verwenden wir als nächsten Punkt x_1 und so weiter:

3.5.2 Definition Sei f differenzierbar auf $]a, b[$. Dann ist die *Newton-Folge* von f mit dem *Startwert* $x_0 \in]a, b[$ die Folge (sofern $f'(x_n) \neq 0$)

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \\ x_2 &= x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \\ &\vdots \\ x_{n+1} &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Wenn diese Folge konvergiert, dann gegen eine Nullstelle von f:

3.5.3 Satz Sei f differenzierbar auf $]a, b[$ mit stetiger Ableitung. Die Newton-Folge von f mit einem Startwert $x_0 \in]a, b[$ existiere und konvergiere gegen z. Dann ist $f(z) = 0$.

3.5.4 Beispiel Sei $f(x) = x^3 - 1$. Beginnen wir mit $x_0 = 3$, so erhalten wir wegen $f'(x) = 3x^2$ (vgl. Abbildung 38)

$$\begin{aligned}
x_1 &= x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 3 - \frac{26}{27} = \frac{55}{27} \approx 2.04 \\
x_2 &= x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \approx 1.44 \\
x_3 &\approx 1.12 \\
x_4 &\approx 1.0124 \\
x_5 &\approx 1.00015
\end{aligned}$$

Die Nullstelle liegt in 1, wir sehen also, dass das Newton-Verfahren hier in nur fünf Schritten eine recht gute Approximation liefert.

Auch andere Startwerte liefern diese Nullstelle, evtl. aber nicht so schnell: beginnen wir mit $x_0 = -1$, erhalten wir

$$\begin{aligned}
x_1 &= -\frac{1}{3} \approx -0.3333 \\
x_2 &= \frac{25}{9} \approx 2.7778 \\
x_3 &= 1.895 \\
x_4 &\approx 1.3562 \\
x_5 &\approx 1.0854 \\
x_6 &\approx 1.0065 \\
x_7 &\approx 1.00004
\end{aligned}$$

3.5.5 Bemerkung Einen Nachteil hat das Newton-Verfahren: es führt nicht immer zum Ziel! Eventuell ist ein $f'(x_n) = 0$, dann existiert die Folge gar nicht. Unter Umständen ist (x_n) auch nicht konvergent.

In der Praxis ist dieser Nachteil des Newton-Verfahrens meistens kein Problem: man wählt einfach einen andern Startwert x_0 und beginnt von Neuem.