3.1.2 Bemerkung **(1)** Der Differenzenquotient (6) wurde zwar durch Anschauung einer reellen Funktion hergeleitet, natürlich können wir die reellen Zahlen x und a aber einfach durch komplexe Zahlen ersetzen.

Definition 3.1.1 kann also in genau gleicher Weise auch für komplexe Funktionen benutzt werden - wir verwenden dann lediglich $x, a \in \mathbb{C}$ statt reeller Werte.

(2) Natürlich kann auch die Ableitung f' auf Differenzierbarkeit untersucht werden und evtl. hat auch f' eine Ableitung, die dann wiederum eine Ableitung haben kann, et cetera. Auf diese Weise entstehen die *Ableitungen höherer Ordnung*

$$f'' \ , \quad f''' \ , \quad f^{(4)} \ , \quad f^{(5)} \ , \ \ldots$$

(3) Die erste Ableitung entspricht — so hatten wir die Ableitung ja konstruiert — der *Steigung* der Funktion.

Die zweite Ableitung stellt nun die Veränderung der Steigung dar, anders ausgedrückt, die *Krümmung* der Funktion.

(4) Nach Definition des Grenzwerts von Funktionen muss jeweils gezeigt werden, dass für *jede* Folge (a_n) aus $D(f)$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(a_n) - f(a)}{a_n - a} = f'(a) \ .$$

Hat man also eine Folge gefunden, für die dieser Grenzwert nicht existiert, ist f nicht differenzierbar. Das gleiche gilt, falls man zwei Folgen hat, die zu unterschiedlichen Grenzwerten führen.

3.1.3 Beispiele **(1)** $f(z) = \alpha z + \beta$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

Sei a ein beliebiger Punkt in $\mathbb{C}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} &= \frac{\alpha z + \beta - \alpha a - \beta}{z - a} \\ &= \frac{\alpha(z - a)}{z - a} \\ &= \alpha \overset{z\to a}{\longrightarrow} \alpha \ , \end{aligned}$$

f ist also differenzierbar in allen komplexen Zahlen (da a beliebig in $\mathbb{C}$ gewählt war) und es gilt

$$f'(z) = \alpha \ .$$

Bei Geraden hatten wir ja auch nichts anderes erwartet. Spezialfälle sind beispielsweise die Identität

$$f(z) = z \qquad \text{mit} \qquad f'(z) = 1$$

oder die konstanten Funktionen

$$f(z) = \beta \qquad \text{mit} \qquad f'(z) = 0 \ .$$

(2) $f(z) = z^2$

Sei wieder $a \in \mathbb{C}$. Dann ist

$$\begin{aligned} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} &= \frac{z^2 - a^2}{z - a} \\ &= \frac{(z + a)(z - a)}{z - a} \\ &= z + a \overset{z\to a}{\longrightarrow} a + a = 2a \end{aligned}$$

Im Punkt a ist f also differenzierbar mit $f'(a) = 2a$. Da a beliebig gewählt war, ist folglich $f(z) = z^2$ auf ganz $\mathbb{C}$ differenzierbar mit $f'(z) = 2z$.

(3) $f(x) = |x|$ im Punkt 0 und mit $D(f) = \mathbb{R}$

Wenn wir uns den Graphen von f vorstellen, bemerken wir, dass f in 0 keine eindeutige Tangente hat — die Betragsfunktion ist dort also vermutlich nicht differenzierbar.

Betrachten wir beispielsweise die Folge $a_n = \frac{1}{n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$:

$$\frac{f(a_n) - f(a)}{a_n - a} = \frac{\left|\frac{1}{n}\right| - |0|}{\frac{1}{n} - 0} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1 \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 \ .$$

Andererseits gilt für $a_n = -\frac{1}{n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$:

$$\frac{f(a_n) - f(a)}{a_n - a} = \frac{\left|-\frac{1}{n}\right| - |0|}{-\frac{1}{n} - 0} = \frac{\frac{1}{n}}{-\frac{1}{n}} = -1 \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} -1 \ .$$

Auf diesen beiden Folgen strebt der Differenzenquotient also gegen unterschiedliche Werte, kann daher nicht konvergieren. Folglich ist $f(x) = |x|$ in 0 nicht differenzierbar.

In allen anderen reellen Zahlen ist die Betragsfunktion aber sehr wohl differenzierbar; die Ableitung ist 1 für positive und -1 für negative Werte.

Sehen wir uns einen allgemeineren Fall an. f sei nun eine in a differenzierbare Funktion, d.h. der Grenzwert

$$\lim_{z\to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} = f'(a) \ .$$

existiert. Es gilt also

$$\lim_{z\to a} (f(z) - f(a)) = \lim_{z\to a} \left(\overbrace{\frac{f(z) - f(a)}{z - a}}^{f'(a)} \cdot \underbrace{(z - a)}_{0} \right) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{z\to a} f(z) = f(a) \ .$$

Dies bedeutet aber gerade, dass f in a stetig ist. Wir haben gezeigt:

3.1.4 Satz Ist eine Funktion differenzierbar, so ist sie auch stetig.

Anders ausgedrückt: Ist eine Funktion nicht stetig, kann sie auch nicht differenzierbar sein.

Die Umkehrung dieses Satzes aber gilt nicht: Oben haben wir gesehen, dass der Betrag in 0 nicht differenzierbar ist, obwohl die Funktion dort stetig ist.

3.2 Ableitungsregeln

Für einige der Funktionen in Abschnitt 2.2 wäre der Nachweis der Differenzierbarkeit und die Berechnung der Ableitung über die Betrachtung von Folgen nicht einfach, zum Beispiel:

3.2.1 Satz Die Funktionen e^z, $\sin x$ und $\cos x$ sind für alle $z \in \mathbb{C}$ bzw. $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt

$$\begin{aligned} (e^z)' &= e^z \\ (\sin x)' &= \cos x \\ (\cos x)' &= -\sin x \end{aligned}$$

Natürlich ist es aber nicht möglich, eine Liste aller differenzierbaren Funktionen aufzustellen, wir brauchen dazu bessere Techniken.

In der Praxis werden zur Berechnung von Ableitungen Regeln verwendet, die besagen, dass Summen, Produkte, usw. differenzierbarer Funktionen wieder differenzierbar sind und beschreiben, wie die gesuchten Ableitungen gebildet werden.

3.2.2 Satz (Summenregel) Seien f und g in a differenzierbar. Dann ist auch $f \pm g$ in a differenzierbar mit

$$(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a) \ .$$

3.2.3 Beispiel Sei $h(z) = z^2 + 2z + 1$. Wir können h als Summe von $f(z) = z^2$ und $g(z) = 2z + 1$ ansehen. Wir wissen aus den Beispielrechnungen 3.1.3

$$f'(z) = 2z \qquad \text{und} \qquad g'(z) = 2$$

und haben daher

$$h'(z) = f'(z) + g'(z) = 2z + 2 \ .$$

Schauen wir uns das Beispiel aus einer anderen Perspektive an: Es gilt $h(z) = z^2 + 2z + 1 = (z+1)(z+1)$. $z+1$ ist eine Gerade, die Ableitung ist $(z+1)' = 1$. Also gilt $(z+1)' \cdot (z+1)' = 1$. Wir wissen aber ja, dass $h'(z) = ((z+1)(z+1))' = 2z + 2$, offensichtlich gilt i.a. $(f \cdot g)' \neq f' \cdot g'$. Für das Produkt von Funktionen brauchen wir eine andere Regel:

3.2.4 Satz (Produktregel) Seien f und g differenzierbar in a. Dann ist $f \cdot g$ differenzierbar in a mit

$$(f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a) \ .$$

3.2.5 Beispiele **(1)** Betrachten wir wie oben $h(z) = z^2 + 2z + 1 = (z+1)(z+1)$. Es folgt

$$h'(z) = 1 \cdot (z+1) + (z+1) \cdot 1 = 2z + 2 \ ,$$

wie wir es oben bereits ausgerechnet hatten.

(2) Betrachten wir den Fall, in dem eine Funktion mit einer Konstanten $c \in \mathbb{C}$ multipliziert wird. Da die Ableitung einer Konstanten Null ist, folgt:

$$(cf(z))' = 0 \cdot f(z) + c \cdot f'(z) = cf'(z) \ .$$

Ein konstanter Faktor bleibt beim Ableiten also einfach erhalten.

(3) Für $h(z) = z^3 = \underbrace{z^2}_{f(z)} \cdot \underbrace{z}_{g(z)}$ erhalten wir

$$h'(z) = 2z \cdot z + z^2 \cdot 1 = 3z^2 \ .$$

Allgemein kann man wie im Beispiel $f(z) = z^3$ mit der Produktregel die Ableitung von höheren Potenzen errechnen. (Für die Potenzen $z^0 = 1$ und $z^1 = z$ haben wir das ja in Beispiel 3.1.3 bereits ausgerechnet.)

Tatsächlich gilt nicht nur für Exponenten aus $\mathbb{N}_0$, sondern allgemeiner auch für reelle Exponenten:

3.2.6 Satz Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann ist $f(z) = z^\alpha$ differenzierbar mit

$$f'(z) = \alpha z^{\alpha - 1} \ .$$

3.2.7 Beispiel Polynome $P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots + a_n z^n$ sind nach Summenregel und Satz 3.2.6 differenzierbar mit

$$P'(z) = a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + \cdots + n a_n z^{n-1} \ .$$

Die Ableitung eines Polynoms ist also auch ein Polynom.

Für den Quotienten differenzierbarer Funktionen gibt es

3.2.8 Satz (Quotientenregel) Seien f und g in a differenzierbar und sei $g(a) \neq 0$. Dann ist $\frac{f}{g}$ in a differenzierbar mit

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2} \ .$$

3.2.9 Beispiel

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)' = \frac{\cos x \cdot x - \sin x \cdot 1}{x^2} = \frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2}$$

Funktionen setzen sich nicht nur durch Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division aus anderen Funktionen zusammen — sie können auch verkettet (vgl. Satz 2.7.5) sein. In diesem Fall verwenden wir

3.2.10 Satz (Kettenregel) Sei $h(z)$ differenzierbar in a und sei $g(z)$ differenzierbar in $h(a)$. Dann ist die Funktion

$$f(z) = g(h(z))$$

differenzierbar in a mit

$$f'(z) = g'(h(z)) \cdot h'(z) \ .$$

g' wird hierbei oft die *äußere Ableitung*, h' die *innere Ableitung* genannt.

3.2.11 Beispiel Betrachten wir $f(x) = (\sin x)^2$. Die innere Funktion ist $h(x) = \sin x$, die äußere Funktion $g(x) = x^2$. Damit gilt

$$\left((\sin x)^2\right)' = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x \ .$$

Eine Ableitungsregel, die bei Umkehrfunktionen wie Logarithmen und den Arcus-Funktionen nützlich ist, wird der Einfachheit halber nur für reelle Funktionen formuliert:

3.2.12 Satz (Ableitung der Umkehrfunktion) Sei $y = f(x)$ stetig und streng monoton auf einem Intervall $[a, b]$ und sei f differenzierbar in $x_0 \in [a, b]$ mit $f'(x_0) \neq 0$.

Dann ist die Umkehrfunktion $x = f^{-1}(y)$ differenzierbar in $y_0 = f(x_0)$ mit

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y_0)\right)} \ .$$

3.2.13 Beispiel Betrachten wir $f(x) = e^x$.

f ist stetig und in jedem Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ streng monoton. Außerdem ist f überall differenzierbar mit $f'(x) = e^x \neq 0$. Die Voraussetzungen des Satzes sind also erfüllt und wir können ihn anwenden.

$f^{-1}(x) = \ln x$ ist für $x > 0$ als Umkehrfunktion von f demnach differenzierbar und es gilt

$$(\ln x)' = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x} \qquad \text{für } x > 0 \ .$$

3.2.14 Bemerkung Betrachten wir allgemeinere Exponentialfunktionen, also $f(z) = a^z$ für ein reelles $a > 0$ und $z \in \mathbb{C}$. Es gilt

$$a^z = \left(e^{\ln a}\right)^z = e^{z \ln a} \ . \tag{7}$$

(Diese Überlegung ist ein gelegentlich sehr nützlicher „Rechentrick“, um solche Ausdrücke zu handhaben.)

Nach der Kettenregel gilt nun

$$(a^z)' = \left(e^{z \ln a}\right)' = e^{z \ln a} \cdot \ln a = a^z \ln a \ .$$

Nur für $a = e$ ist $\ln a = 1$. Der Spezialfall $(e^z)' = e^z$ ist also von allen Exponentialfunktionen diejenige Funktion mit der einfachsten Ableitung! Dies erklärt die Bedeutung der Funktion e^z im Vergleich zu Exponentialfunktionen zu anderen Basen.

Mit Satz 3.2.6 können wir Funktionen der Form x^k ableiten und der „Rechentrick“ in (7) kann benutzt werden, um Funktionen abzuleiten, bei denen x im Exponenten steht. Was aber machen wir, wenn x sowohl in der Basis als auch im Exponenten auftritt? Für solche Fälle benötigen wir unsere letzte Ableitungsregel:

3.2.15 Satz (logarithmische Differenziation) Seien f und g differenzierbar auf einem Intervall $]a, b[$ mit $f(x) > 0$. Dann ist $f(x)^{g(x)}$ differenzierbar mit

$$\left(f(x)^{g(x)}\right)' = f(x)^{g(x)} \cdot (g(x) \cdot \ln f(x))' \ .$$

3.2.16 Beispiel Berechnen wir die Ableitung von $f(x) = x^x$ für $x > 0$:

$$\begin{aligned}(x^x)' &= x^x (x \ln x)' \\ &= x^x \left(1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}\right) \\ &= x^x (\ln x + 1)\end{aligned}$$

3.3 Extremwerte

Dieses Thema ist wohl allen noch aus der Schulzeit bekannt — wir schauen es uns einmal genauer an.

Da in den komplexen Zahlen keine Größenvergleiche möglich sind, gibt es bei komplexwertigen Funktionen keine Extremwerte, wir betrachten daher nur reelle Funktionen.

Zur Erinnerung: Wir bezeichnen mit $U_\varepsilon(a)$ eine ε-Umgebung des Punktes a (vgl. Definition 1.9.1), d.h. die Punkte, deren Abstand von a kleiner als ε ist.

3.3.1 Definition Sei f eine Funktion, die auf $]a, b[$ definiert ist. f hat in $x_0 \in]a, b[$ ein

- *lokales Minimum*, wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass $f(x_0) \leq f(x)$ für alle $x \in U_\varepsilon(x_0)$,
- *lokales Maximum*, wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass $f(x_0) \geq f(x)$ für alle $x \in U_\varepsilon(x_0)$.

Ein Minimum oder Maximum wird auch als *Extremum* bezeichnet.

Wir sprechen also von einem lokalen Maximum (Minimum), wenn der Funktionswert in einem Punkt größer (kleiner) ist, als in einer Umgebung des Punktes.

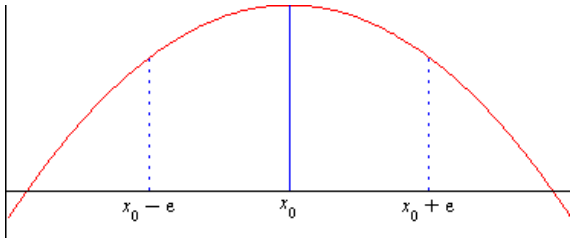

Abbildung 37: Vor dem Maximum wächst die Funktion, dahinter fällt sie

Offensichtlich wächst die Funktion auf der linken Seite eines Maximums (es ist dort also $f'(x) > 0$), auf der rechten Seite fällt die Funktion (also $f'(x) < 0$). Bei einem Minimum verhält es sich genau umgekehrt. In einem Extremum muss stets $f'(x) = 0$ gelten. Dies ist ein erstes Kriterium für das Vorliegen eines Extremums:

3.3.2 Satz (notwendiges Kriterium für Extrema) Sei f eine in x_0 differenzierbare Funktion. Hat f in x_0 ein lokales Extremum, so gilt $f'(x_0) = 0$.

3.3.3 Beispiele **(1)** $f(x) = x^2$ hat in $x = 0$ bekanntlich ein Minimum. Tatsächlich gilt $f'(x) = 2x$, also $f'(0) = 0$.

(2) $f(x) = x^3$ hat *kein* Extremum in $x = 0$. Trotzdem ist $f'(x) = 3x^2$, also $f'(0) = 0$.

Das letzte Beispiel zeigt, dass die Ableitung auch den Wert 0 annehmen kann, obwohl kein Extremum vorliegt. Das Kriterium nennt man deshalb „notwendig“, da $f'(x) = 0$ zwar notwendig für ein Extremum ist, aber nicht hinreichend. Das Kriterium ist dennoch nützlich, wir können damit nämlich die möglichen Stellen für ein Extremum finden und diese Stellen dann näher untersuchen.

Wie wir oben gesehen haben, wächst auf der linken Seite eines Maximums die Funktion, dieses Wachstum wird aber immer geringer bis dieses Wachstum rechts des Maximums sogar negativ wird, weil die Funktion fällt.

Das Wachstum wird durch f' dargestellt, die Veränderung davon ist die Ableitung hiervon, also f''. Dass das Wachstum immer geringer wird, bedeutet also mathematisch ausgedrückt, dass die zweite Ableitung negativ wird.

Betrachten wir ein Minimum, gilt die analoge Überlegung. Wir erhalten

3.3.4 Satz (hinreichendes Kriterium für Extrema) f sei 2-mal differenzierbar mit $f'(x_0) = 0$.

- Ist $f''(x_0) < 0$, dann hat f in x_0 ein lokales Maximum,
- ist $f''(x_0) > 0$, dann hat f in x_0 ein lokales Minimum.

3.3.5 Beispiel Betrachten wir $f(x) = x^3 - 3x^2$.

Es ist $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$, also ist $f'(x) = 0$ für $x = 0$ und für $x = 2$. Dies sind also die Stellen, an denen Extrema vorliegen könnten.

Weiter ist $f''(x) = 6x - 6$, folglich $f''(0) = -6 < 0$, f hat in 0 also ein lokales Maximum.

In $x = 2$ ist $f''(2) = 6 > 0$, f hat in 2 also ein lokales Minimum.

Aber auch der letzte Satz löst das Problem, ein Extremum zu finden, noch nicht in jedem Fall:

Es ist z.B. $f(x) = x^3 \;\Rightarrow\; f'(x) = 3x^2 \;\Rightarrow\; f''(x) = 6x$, also $f'(0) = 0$ und $f''(0) = 0$, der Satz macht also keine Aussage. Tatsächlich hat x^3 in 0 kein Extremum. Dies kann man in der Situation, dass $f''(x) = 0$ gilt, aber nicht immer folgern, denn es ist auch $f(x) = x^4 \;\Rightarrow\; f'(x) = 4x^3 \;\Rightarrow\; f''(x) = 12x^2$ und x^4 hat in 0 ein Minimum.

Die genauen Voraussetzungen für das Vorliegen von Minimum, Maximum oder keinem Extremum beschreibt:

3.3.6 Satz Eine Funktion f sei n-mal differenzierbar auf $]a, b[$ mit $n \geq 2$. An einer Stelle x_0 gelte

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$$

aber

$$f^{(n)}(x_0) \neq 0 \ .$$

Dann gilt:

- Ist n gerade und $f^{(n)}(x_0) < 0$, dann hat f in x_0 ein lokales Maximum,
- ist n gerade und $f^{(n)}(x_0) > 0$, dann hat f in x_0 ein lokales Minimum und
- ist n ungerade, dann hat f in x_0 kein Extremum.

3.3.7 Beispiel Sei $f(x) = \frac{1}{6}x^6 - \frac{2}{5}x^5 + \frac{1}{4}x^4$. Da

$$f'(x) = x^5 - 2x^4 + x^3 = x^3(x^2 - 2x + 1) = x^3(x-1)^2$$

hat f' Nullstellen in 0 und 1. Dies sind also mögliche Stellen für Extremwerte.

Es gilt weiter

$$\begin{aligned} f''(x) &= 5x^4 - 8x^3 + 3x^2 && \Rightarrow f''(0) = 0 \quad \text{und } f''(1) = 0 \\ f'''(x) &= 20x^3 - 24x^2 + 6x && \Rightarrow f'''(0) = 0 \quad \text{und } f'''(1) = 2 \\ f^{(4)}(x) &= 60x^2 - 48x + 6 && \Rightarrow f^{(4)}(0) = 6 \end{aligned}$$

In $x = 0$ ist also $n = 4$ (gerade) und $f^{(4)}(0) > 0$, es liegt also ein lokales Minimum vor.

In $x = 1$ dagegen ist $n = 3$, n ist also ungerade und es gibt hier kein Extremum.