2.4.5 Satz Die Exponentialfunktion ist periodisch und hat die Periode $2\pi i$:

$$e^{z+2\pi i} = e^z \ .$$

Im Reellen erscheint uns die Exponentialfunktion alles andere als periodisch zu sein. Dies liegt daran, dass die Periode imaginär und nicht reell ist.

Die Periodizität von e^z ist der Grund, warum im Komplexen Logarithmen etwas schwieriger zu behandeln sind als im Reellen: Der natürliche Logarithmus ist die Umkehrung der Exponentialfunktion. Wegen der Periodizität von e^z gibt es aber mehrere Werte $z \in \mathbb{C}$ mit $e^z = w$. Für $\log w$ kommen also mehrere Werte in Frage.

Hat $z \neq 0$ die Polarkoordinaten r und φ, ist also nach Bemerkung 2.4.4 $z = re^{i\varphi}$, dann erhält man mit den üblichen Rechenregeln für den Logarithmus:

$$\begin{aligned} \ln z &= \ln\left(r \cdot e^{i\varphi}\right) \\ &= \ln r + \ln\left(e^{i\varphi}\right) \\ &= \ln r + i\varphi \ . \end{aligned}$$

r ist reell und positiv, $\ln r$ können wir also wie gewohnt berechnen. $\ln r + i\varphi$ wird gelegentlich als *Hauptwert* von $\log z$ bezeichnet.

Weitere Werte erhält man durch die Periodizität von e^z, z.B. ist auch

$$\ln z = \ln\left(r \cdot e^{i\varphi}\right) = \ln\left(r \cdot e^{i\varphi + 2\pi i}\right) = \ln r + i\varphi + 2\pi i \ .$$

2.5 Komplexe Wurzeln

Kommen wir noch einmal auf Bemerkung 2.4.4 zurück. Wenn r und φ die Polarkoordinaten von z sind, ist danach $z = re^{i\varphi}$. Wir erhalten daraus eine Formel für die Potenzen komplexer Zahlen:

2.5.1 Satz (Formel von de Moivre) Sei k eine ganze Zahl und $z \in \mathbb{C}$ habe die Polarkoordinaten r und φ, d.h. $z = re^{i\varphi}$. Dann gilt

$$z^k = r^k \cdot e^{ik\varphi} \ .$$

z^k hat also die Polarkoordinaten r^k und $k\varphi$. Dies erlaubt uns eine geometrische Interpretation des Potenzierens in $\mathbb{C}$:

Potenzieren wir eine komplexe Zahl „hoch k“, dann potenziert sich der Betrag r ebenfalls zu r^k, der Winkel φ wird dagegen mit k multipliziert. Beim Quadrieren einer komplexen Zahl ($k = 2$) quadriert sich also der Betrag, der Winkel verdoppelt sich.

Das Potenzieren mit rationalen Zahlen — also die Berechnung von Wurzeln — ist in $\mathbb{C}$ leider nicht so einfach. Betrachten wir z.B.

$$z^3 = 8 \ .$$

In den reellen Zahlen hätte diese Gleichung die Lösung $z = 8^{1/3} = \sqrt[3]{8} = 2 \in \mathbb{R}$. In $\mathbb{C}$ aber gibt es mehrere Lösungen:

$$\begin{aligned} 2^3 &= 8 \\ (-1 + i\sqrt{3})^3 &= (1 - 2i\sqrt{3} - 3)(-1 + i\sqrt{3}) = -1 + i\sqrt{3} + 2i\sqrt{3} + 2 \cdot 3 + 3 - 3i\sqrt{3} = 8 \\ (-1 - i\sqrt{3})^3 &= (1 + 2i\sqrt{3} - 3)(-1 - i\sqrt{3}) = -1 - i\sqrt{3} - 2i\sqrt{3} + 2 \cdot 3 + 3 + 3i\sqrt{3} = 8 \end{aligned}$$

Tatsächlich gibt es in $\mathbb{C}$ immer zwei zweite Wurzeln, drei dritte Wurzeln, vier vierte Wurzeln et cetera.

Alle diese Wurzeln liegen in der Gaußschen Ebene auf einem Kreis um den Nullpunkt und teilen diesen Kreis in Segmente gleicher Größe (vgl. Abb. 19).

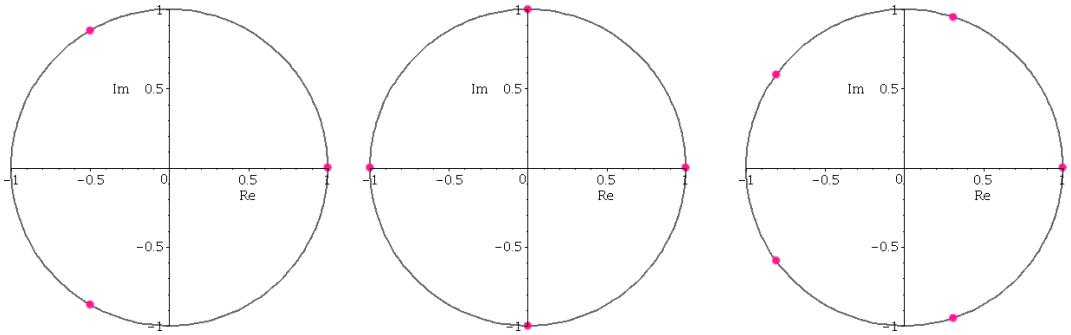

Abbildung 19: 3., 4. und 5. Wurzeln der 1, also Lösungen von $z^n = 1$ für $n = 3, 4, 5$

Wir hatten beispielsweise die reelle zweite Wurzel (Definition 1.5.4) stets als die *nicht negative* Lösung der Gleichung $x^2 = a$ angesehen. Für komplexe Zahlen gibt es aber kein „positiv“ oder „negativ“. Wurzeln sind in den komplexen Zahlen daher keine Funktionen.

2.6 Grenzwerte von Funktionen

Grenzwerte haben wir bei Folgen bereits kennengelernt. Konvergenz gibt es auch bei Funktionen. Während bei Folgen aber stets $n \to \infty$ betrachtet wird, gibt es bei Funktionen mehrere Möglichkeiten; die Konvergenz kann in jedem Punkt der reellen oder komplexen Zahlen sowie in $\pm\infty$ betrachtet werden.

2.6.1 Beispiel Der Kehrwert $f(x) = \frac{1}{x}$ nimmt für wachsende x Werte an, die sich immer weiter 0 nähern:

$x =$	1	10	100	1000
$f(x) =$	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$

Auch, wenn x immer kleinere Werte annimmt, nähert sich $f(x)$ der Null:

$x =$	-1	-10	-100	-1000
$f(x) =$	-1	$-\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{100}$	$-\frac{1}{1000}$

In der Nähe von 0, zeigt $f(x)$ dagegen kein einheitliches Verhalten:

$x =$	-1	$-\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{100}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{10}$	1
$f(x) =$	-1	-10	-100	100	10	1

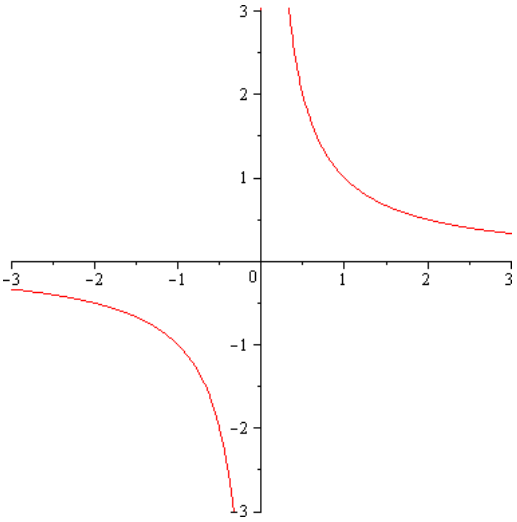

Abbildung 20: $f(x) = \frac{1}{x}$

Dieses Verhalten, Konvergenz bzw. Divergenz bei der Annäherung an eine untersuchte Stelle a, wollen wir exakter fassen. Die Idee ist, eine Folge (a_n) zu betrachten, die gegen die untersuchte Stelle a konvergiert, und dann die Konvergenz der Folge $(f(a_n))$ anzuschauen (die Konvergenz von Folgen kennen wir ja schon; vgl. Abb. 21).

2.6.2 Definition Eine Funktion f hat an der Stelle a (hier ist $a \in \mathbb{R}$ oder $a = \pm\infty$ sowie $a \in \mathbb{C}$ zugelassen) einen *Grenzwert* g, wenn für jede Folge (a_n) mit $a_n \in D(f)$ und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = g \ .$$

Die Bezeichnung für diesen Grenzwert einer Funktion ist

$$\lim_{x\to a} f(x) = g \ .$$

2.6.3 Bemerkung Formal müssten wir, um nachzuweisen, ob ein bestimmter Wert Grenzwert einer gegeben Funktion ist, *alle* Folgen (a_n) betrachten, die gegen die betrachtete Stelle konvergieren und $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)$ für *alle* diese Folgen berechnen.

Wir wollen hier einen pragmatischeren Weg gehen, auch wenn dieser sehr „unmathematisch“ ist: In den allermeisten Fällen ist bereits nach kurzer Rechnung oder durch Betrachtung des Graphen „klar“, gegen welchen Grenzwert eine Funktion konvergiert. Mathematisch müsste dies natürlich exakt bewiesen werden, in der Praxis ist das aber oft gar nicht erforderlich.

2.6.4 Beispiele **(1)** $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ mit $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ im Punkt $a = 1$.

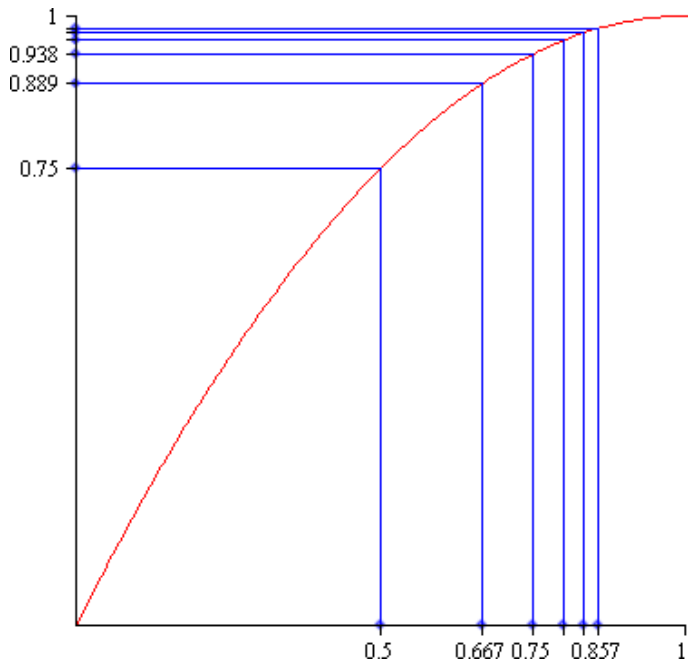

Abbildung 21: Wenn eine Folge (a_n) auf der x-Achse gegen 1 konvergiert, konvergiert die Folge $(f(a_n))$ auf der y-Achse ebenfalls: Hier existiert also der Grenzwert der Funktion.

Es gilt

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} f(x) &= \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} \\ &= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} \\ &= \lim_{x\to 1}(x+1) \\ &= 2\ .\end{aligned}$$

(2) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ mit $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Wir hatten ja schon in Beispiel 2.6.1 gesehen, dass wir hier unterschiedliches Konvergenzverhalten finden, Abbildung 20 zeigt dies auch deutlich.

Für $x \to \pm\infty$ nähern sich die Funktionswerte der Null, es gilt also

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0\ .$$

In Null selbst ist $f(x) = \frac{1}{x}$ gar nicht definiert, es gibt aber auch keinen Wert, gegen den die Funktion dort konvergiert, $f(x)$ hat also für $x \to 0$ keinen Grenzwert.

Wie bei der Konvergenz von Folgen gilt auch für Funktionen:

2.6.5 Satz (Rechenregeln) Seien f und g Funktionen mit $\lim\limits_{x\to a} f(x) = F$ und $\lim\limits_{x\to a} g(x) = G$. Dann gilt:

- $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = F + G$
- $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \cdot g(x)) = F \cdot G$
- $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{F}{G}$, sofern $g(x) \neq 0$ und $G \neq 0$

2.6.6 Beispiele **(1)** $\lim\limits_{x\to 0}(1 + 2x - x^2) = 1 + 2 \cdot 0 - 0 \cdot 0 = 1$, da $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$.

(2) $\lim\limits_{z\to i}(1 + 2z - z^2) = 1 + 2i - i^2 = 2 + 2i$

2.7 Stetigkeit

Der Begriff der „Stetigkeit“ ist anschaulich ziemlich klar: Man bezeichnet eine Funktion als stetig in einem Punkt, wenn sie dort nicht „springt“, also nicht plötzlich ihre Werte verändert.

Mathematisch ausgedrückt, bedeutet dies, dass der Grenzwert der Funktion in diesem Punkt gerade gleich dem Funktionswert ist:

2.7.1 Definition Eine Funktion f ist an einer Stelle $a \in D(f)$ *stetig*, wenn der Grenzwert von f an dieser Stelle existiert mit

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \ .$$

Ist f stetig in allen Punkten einer Menge M, dann heißt f *stetig auf* M.

Ist eine Funktion in einem Punkt ihres Definitionsbereichs nicht stetig, gibt es im Wesentlichen zwei Möglichkeiten: Entweder gibt es den Grenzwert der Funktion in diesem Punkt gar nicht, oder der Grenzwert existiert zwar, ist aber verschieden vom Funktionswert.

In den meisten Fällen ist anschaulich klar, ob eine Funktion stetig ist bzw. wo ihre Unstetigkeitsstellen liegen:

2.7.2 Beispiele **(1)** Die konstante Funktion $f(z) = c$, die Identität $f(z) = z$ und allgemein alle Geraden sind auf ganz $\mathbb{R}$ bzw. ganz $\mathbb{C}$ stetig (vgl. Abbildung 8).

(2) $f(z) = \dfrac{1}{z}$

Der Kehrwert $f(z) = \frac{1}{z}$ (vgl. Abbildung 10) ist für $z \neq 0$ offenbar stetig.

Interessant ist die Stelle $z = 0$. f ist in diesem Punkt nicht definiert, kann dort also auch nicht unstetig oder stetig sein. Die Frage nach (Un-)Stetigkeit macht nur für Punkte aus dem Definitionsbereich Sinn. Man kann also nicht sagen, $f(z)$ sei unstetig in 0.

Tatsächlich hat die Kehrwertfunktion keine Unstetigkeitsstellen.

(3) $f(z) = \begin{cases} \frac{1}{z} & \text{für } z \neq 0 \\ 0 & \text{für } z = 0 \end{cases}$

Diese Funktion ist auch für $z = 0$ definiert, wir können also $D(f) = \mathbb{C}$ betrachten.

Wie die Kehrwertfunktion aus Beispiel (2) ist auch diese Funktion stetig für $z \neq 0$.

In 0 ist f aber unstetig, denn der Grenzwert $\lim\limits_{z\to 0} f(z)$ existiert nicht, kann also nicht gleich dem Funktionswert $f(0) = 0$ sein.

Für stetige Funktionen gelten die Rechenregeln, wie wir sie auch schon für die Grenzwerte von Funktionen kennen:

2.7.3 Satz (Rechenregeln) Sind $f(z)$ und $g(z)$ stetige Funktionen, so ist auch...

- $f(z) \pm g(z)$ stetig,
- $f(z) \cdot g(z)$ stetig und
- $\dfrac{f(z)}{g(z)}$ stetig, sofern $g(z) \neq 0$.

2.7.4 Beispiele **(1)** *Polynome* $P(z) = a_0 + a_1 z - a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$ sind stetig auf $D(P) = \mathbb{C}$:

Polynome sind durch Addition und Multiplikation „zusammengesetzt“ aus den stetigen Funktionen $f(z) = z$ und der konstanten Funktion $f(z) = c$ und sind daher stetig.

Insbesondere sind die Potenzen, also $f(z) = c$, $f(z) = z$, $f(z) = z^2$, $f(z) = z^3$,... stetig.

(2) *Rationale Funktionen* sind die Funktionen $R(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$, wobei P und Q Polynome sind. Es gilt $D(R) = \{z \in \mathbb{C} : Q(z) \neq 0\}$.

Rationale Funktionen sind ebenfalls stetig, da sie sich aus (stetigen) Polynomen durch Division ergeben. Die „kritischen“ Stellen, in denen der Nenner 0 wird, liegen nicht im Definitionsbereich, dort kann die Funktion also weder stetig noch unstetig sein, da es sie dort gar nicht gibt.

Insbesondere ist z.B. die Kehrwert-Funktion $f(z) = \frac{1}{z}$ stetig, das wissen wir aber ja bereits.

Viele der „üblichen“ Funktionen wie Polynome oder irrationale Funktionen sind also stetig. Ebenfalls stetig sind:

$$\sin x\ , \quad \cos x\ , \quad e^z\ , \quad \ln z\ , \quad |z|$$

Außerdem gilt

2.7.5 Satz Seien f und g stetige Funktionen mit $W(g) \subset D(f)$. Dann ist auch die *verkettete* Funktion $f(g(z))$ stetig.

2.7.6 Beispiel $\cos \dfrac{1}{x}$ ist stetig auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$:

$\frac{1}{x}$ ist stetig auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $W\left(\frac{1}{x}\right) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. cos ist stetig mit $D(\cos) = \mathbb{R}$, also ist $\cos \frac{1}{x}$ stetig.

2.8 Umkehrfunktionen

2.8.1 Definition Sei f eine Funktion. Eine Funktion f^{-1} heißt *Umkehrfunktion*, wenn $f^{-1}(w) = z$ für $w = f(z)$.

f^{-1} darf nicht mit $\frac{1}{f(z)} = (f(z))^{-1}$ verwechselt werden. Man verwendet hier gleiche Bezeichnungen für unterschiedliche Dinge.

2.8.2 Satz (Eigenschaften) Für eine Funktion f und die zugehörige Umkehrfunktion f^{-1} gilt

- $D(f^{-1}) = W(f)$
- $(f^{-1})^{-1} = f$
- $f(f^{-1}(w)) = w$
- $f^{-1}(f(z)) = z$

Der Graph der Umkehrfunktion entspricht für reelle Funktionen mit $D(f) \subset \mathbb{R}$ und $W(f) \subset \mathbb{R}$ der Spiegelung des ursprünglichen Funktionsgraphen an der Winkelhalbierenden.

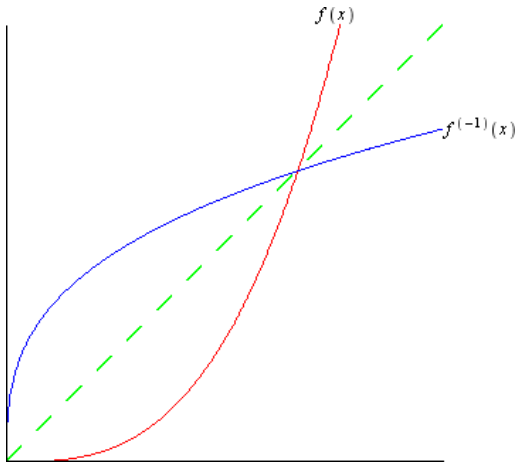

Abbildung 22: Eine Funktion und ihre Umkehrfunktion

2.8.3 Beispiele **(1)** $f(z) = 2z$ mit $D(f) = \mathbb{C}$

Da $w = 2z \Leftrightarrow z = \frac{1}{2}w$, gilt $f^{-1}(w) = \frac{1}{2}w$.

(2) $f(z) = \frac{1}{z}$ mit $D(f) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$

Der Kehrwert ist seine eigene Umkehrfunktion, also $f^{-1}(w) = \frac{1}{w}$, denn $w = \frac{1}{z} \Leftrightarrow z = \frac{1}{w}$.

(3) $f(x) = x^2$ mit $D(f) = \mathbb{R}$

Es gilt $f(2) = 4$, aber auch $f(-2) = 4$, derselbe Wert (hier 4) wird mehrfach angenommen. Es ist also unmöglich, x-Werte eindeutig y-Werten zuzuordnen. Daher können wir z.B. $f^{-1}(4)$ nicht berechnen, es könnte sowohl -2 als auch 2 sein.

Das letzte Beispiel zeigt, dass eine Umkehrfunktion nicht immer existiert. Um eine Umkehrfunktion zu haben, darf jeder y-Wert nur einmal angenommen werden.

Um wenigstens bei reellen Funktionen genau zu sagen, wann es eine Umkehrfunktion gibt, benötigen wir zuerst eine neue Definition (analog zur Monotonie von Folgen):

2.8.4 Definition f sei eine Funktion mit $D(f) \subset \mathbb{R}$ und $W(f) \subset \mathbb{R}$ und sei $x_1 < x_2$. f ist...

- *monoton wachsend*, wenn $f(x_1) \leq f(x_2)$,
- *monoton fallend*, wenn $f(x_1) \geq f(x_2)$,
- *streng monoton wachsend*, wenn $f(x_1) < f(x_2)$,
- *streng monoton fallend*, wenn $f(x_1) > f(x_2)$,

Hiermit können wir ein Kriterium für die Existenz von Umkehrfunktionen angeben:

2.8.5 Satz Sei $y = f(x)$ mit $D(f) \subset \mathbb{R}$ und $W(f) \subset \mathbb{R}$ stetig und streng monoton auf dem Intervall $[a, b]$. Dann existiert die Umkehrfunktion $x = f^{-1}(y)$.

Sie ist stetig und streng monoton wachsend, wenn f streng monoton wächst bzw. streng monoton fallend, wenn f streng monoton fällt.

2.8.6 Beispiele **(1)** $f(x) = \sin x$

f ist zwar stetig auf $\mathbb{R}$, aber nicht monoton (vgl. Abbildung 7), scheinbar können wir den obigen Satz also gar nicht anwenden. Wir können die Funktion aber streng monoton „machen“, indem wir ihren Definitionsbereich auf ein Intervall einschränken, in dem sie dies ist.

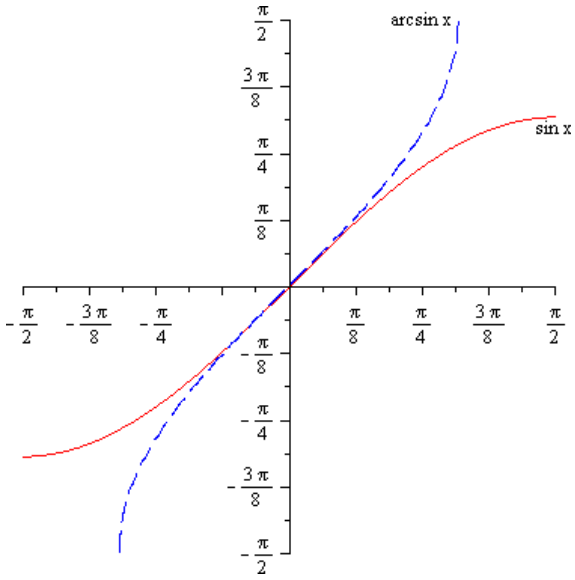

Abbildung 23: $\sin x$ und $\arcsin x$

Betrachten wir also $f(x) = \sin x$ mit $D(f) = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Auf $D(f)$ ist f streng monoton wachsend, es gibt nach Satz 2.8.5 also eine (ebenfalls streng monoton wachsende) Umkehrfunktion für $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, den *Arcus Sinus* (Abb.23):

$$y = \sin x \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \sin^{-1} y = \arcsin y \ .$$

Da $W(\sin) = [-1, 1]$ und wir hier $D(f) = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ betrachten, gilt

$$D(\arcsin) = [-1, 1]$$
$$W(\arcsin) = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

(2) $f(x) = \cos x$

Analog zum Sinus behandeln wir den Cosinus: $\cos x$ ist stetig und streng monoton fallend auf $[0, \pi]$. Also existiert eine streng monoton fallende Umkehrfunktion, der *Arcus Cosinus* (Abb. 24):

Für $x \in [0, \pi]$ gilt

$$y = \cos x \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \cos^{-1} y = \arccos y$$

mit

$$D(\arccos) = [-1, 1]$$
$$W(\arccos) = [0, \pi]$$

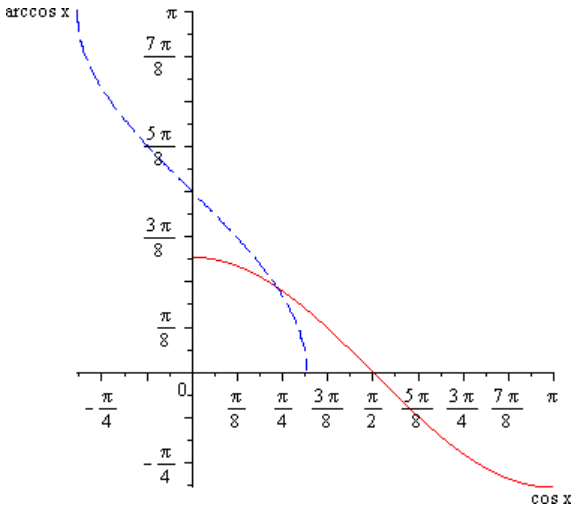

Abbildung 24: $\cos x$ und $\arccos x$

(3) $f(x) = x^2$
Oben hatten wir bereits gesehen, dass $f(x) = x^2$ auf $\mathbb{R}$ keine Umkehrfunktion haben kann. Unsere Methode, den Definitionsbereich geeignet einzuschränken, funktioniert aber auch hier.

Auf $D(f) = [0, \infty[$ ist f streng monoton wachsend und stetig, es gibt also eine Umkehrfunktion, die uns auch schon bekannt ist:

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x} \qquad \text{für } x \geq 0 \ .$$

(4) $f(x) = e^x$
Die Exponentialfunktion ist in $\mathbb{R}$ auch ohne Einschränkung ihres Definitionsbereichs streng monoton. Die Umkehrfunktion ist der natürliche Logarithmus:

$$f^{-1}(x) = \ln x \ .$$

2.9 Logarithmische Skalen

Kommen wir noch einmal auf die Entwicklung der Covid19-Fallzahlen im Jahr 2020 aus Abschnitt 2.2.2 zurück.

Abbildungen 25 und 26 stellen beide den Verlauf der Covid-19-Pandemie in Deutschland von Februar bis Oktober 2020 dar. Während in der linken Abbildung aber gerade in den Anfangstagen der Pandemie kaum etwas zu erkennen ist, zeigt die rechte Abbildung deutlicher eine Entwicklung auch in der Anfangszeit.

Grund ist die *logarithmische Skalierung* der vertikalen Achse im rechten Bild. Der Abstand zwischen den Linien für 10 und 100 Fällen ist dabei genauso groß, wie der Abstand zwischen 100 und 1 000, der zwischen 1 000 und 10 000 usw.

Das Besondere an dieser Darstellung: Exponentielles Verhalten zeigt sich nun als *Gerade*, wie wir in den Abbildungen 27 und 28 am Beispiel von $f(x) = 2^x$ sehen können.

In Abbildung 26 ist das gut z.B. in den ersten März-Wochen zu erkennen: die Kurve stellt dort näherungsweise eine Gerade dar. In den späteren Tagen der Entwicklung krümmt sich die Kurve dagegen nach rechts — ein Zeichen, dass das Wachstum nicht mehr exponentiell fortschreitet.

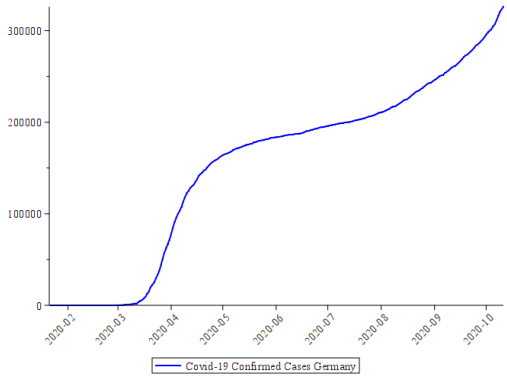

Abbildung 25: Covid-19-Fallzahlen mit linearer y-Skala

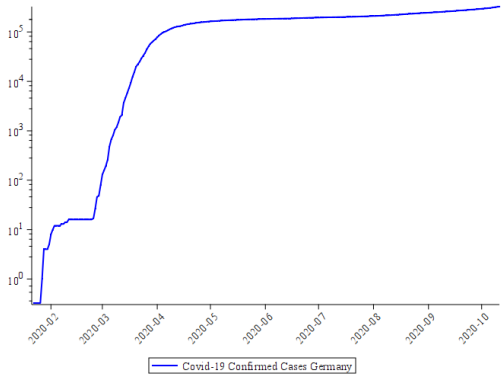

Abbildung 26: Covid-19-Fallzahlen mit logarithmischer y-Skala

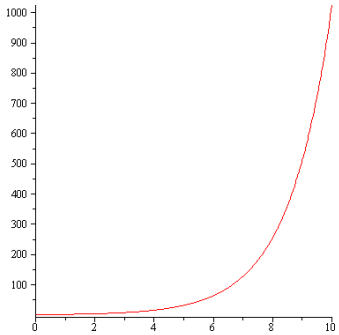

Abbildung 27: $f(x) = 2^x$ mit linearer y-Skala

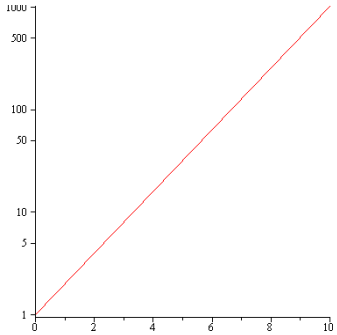

Abbildung 28: $f(x) = 2^x$ mit logarithmischer y-Skala

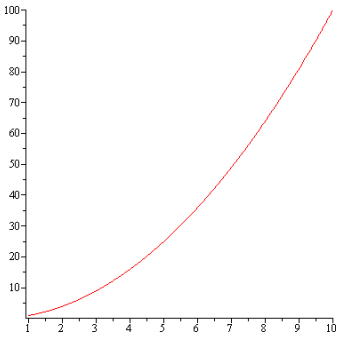

Abbildung 29: $f(x) = x^2$ mit linearen Skalen

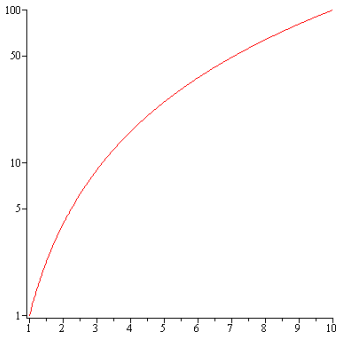

Abbildung 30: $f(x) = x^2$ mit logarithmischer y-Skala

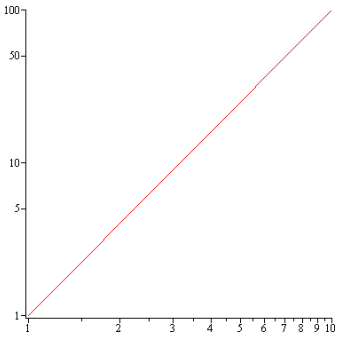

Abbildung 31: $f(x) = x^2$ mit doppeltlogarithmischer Skalierung (logarithmische x- und y-Achse)

Betrachten wir nun statt der Exponentialfunktion eine Potenz, z.B. $f(x) = x^2$ mit $x \in \mathbb{R}$. Diese Funktion wächst langsamer als eine Exponentialfunktion, in logarithmischer Darstellung ist der Graph also nach unten gekrümmt (Abbildung 30). Verwenden wir aber zusätzlich auch auf der horizontalen Achse eine logarithmische Skala, erhalten wir eine Gerade (Abbildung 31). Eine solche Darstellung heißt *doppeltlogarithmisch*.

In der Praxis ist der Eintrag von (Mess-)Werten in logarithmische oder doppeltlogarithmische

Skalen auch eine einfache Möglichkeit, zu prüfen, ob z.B. experimentelle Daten einer exponentiellen oder einer potenziellen Gesetzmäßigkeit entsprechen:

In Graphen mit linearen Skalen sind Potenzen oder Exponentialfunktionen kaum zu unterscheiden. Zeichnet man die Graphen aber mit (doppelt-)logarithmischen Skalen, ist i.a. recht leicht erkennbar, wann die Daten die Form einer Geraden annehmen. Dies hilft dann, den richtigen Ansatz für eine mathematische Modellierung zu finden, d.h. eine Funktion zu finden, die das Verhalten der beobachteten Daten beschreibt.

2.9.1 Beispiel Betrachten wir ein Experiment, in dem wir eine Größe in Abhängigkeit von einer anderen Größe messen.[3] In Abbildung 32 sind die gemessenen Werte eingezeichnet. Wir können den Werten nicht entnehmen, welche Gesetzmäßigkeit vorliegt.

In logarithmischer Darstellung — Abbildung 33 —sehen wir aber, dass es sich offenbar nicht um eine exponentielle Abhängigkeit handelt, da der Graph keine Gerade darstellt. Ein Exponential-Ansatz der Form $f(t) = Ae^{Bt}$ wie in Abschnitt 2.2.2 wäre also falsch gewesen.

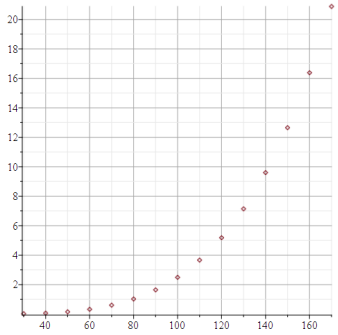

Abbildung 32: Meßwerte mit linearer Skala

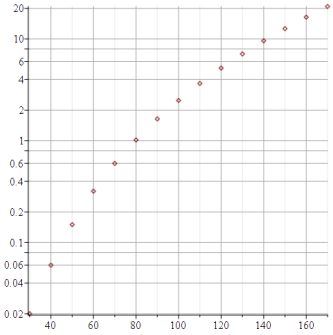

Abbildung 33: Meßwerte mit logarithmischer Skala

Versuchen wir, die Daten in doppeltlogarithmischen Skalen darzustellen, erhalten wir Abbildung 34.

Hier scheinen die gemessenen Werte eine Gerade zu bilden. Wir können also vermuten — ohne Näheres über die Gesetzmäßigkeiten des Experiments zu wissen —, dass es sich hier wohl um eine Potenz handelt und einen Ansatz der Form $f(t) = at^b$ probieren.[4]

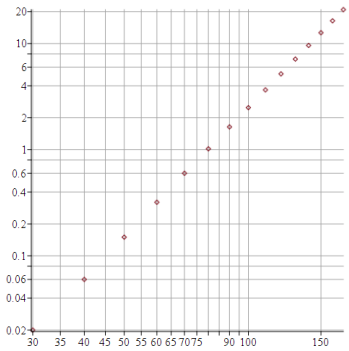

Abbildung 34: Meßwerte mit doppeltlogarithmischer Skala

[3]Es ist ganz egal, worum es sich im Einzelnen handelt. In diesem Beispiel benutze ich die Strahlungsleistung eines schwarzen Strahlers bei verschiedenen Temperaturen.

[4]Tatsächlich unterliegt das Experiment dem *Stefan-Boltzmann-Gesetz*: $P = \sigma \cdot A \cdot t^4$

3 Differenzialrechnung

3.1 Differenzierbarkeit

Eine Grundidee der Differenzialrechnung ist die Frage, welche „Steigung“ eine Funktion in einem gegebenen Punkt hat.

Wir schauen uns zuerst nur reelle Funktionen an, da wir deren Graph zeichnen können. Das Prinzip können wir dann aber leicht auf komplexe Funktionen übertragen.

Betrachten wir eine Funktion $f(x)$ an einem Punkt a. Der Graph der Funktion läuft also durch den Punkt mit den Koordinaten $(a, f(a))$. Wir wollen die Steigung von f an dieser Stelle bestimmen. Da wir die Steigung von Geraden leicht angeben können (α ist ja die Steigung der Geraden $g(x) = \alpha x + \beta$), versuchen wir die *Tangente* an dem untersuchten Punkt zu bestimmen.

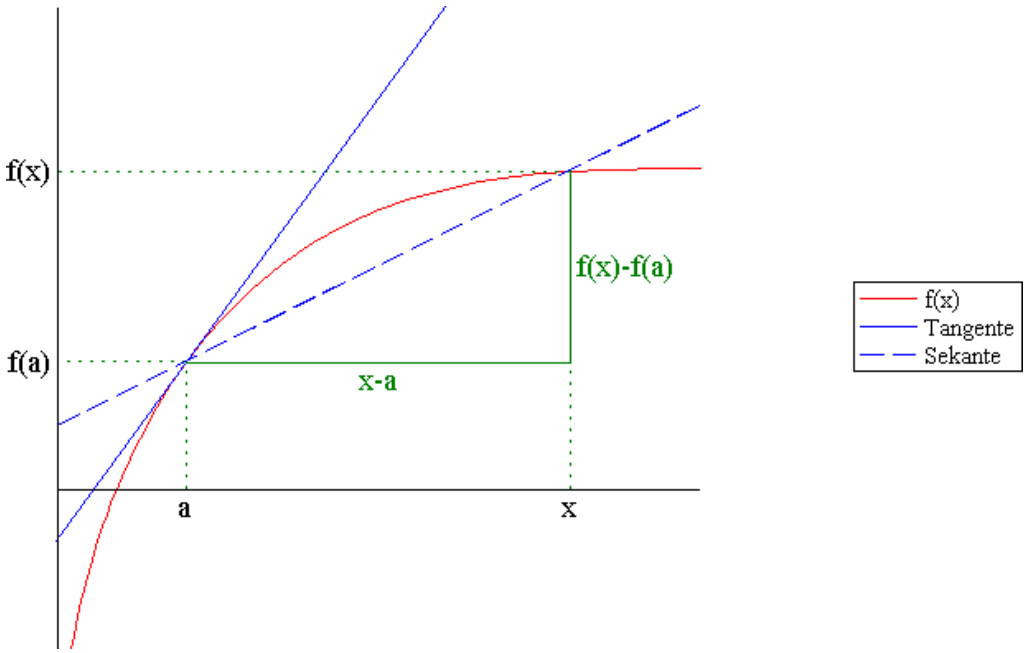

Abbildung 35: Sekante und Tangente einer Funktion

Dazu schauen wir uns zuerst eine *Sekante* an, also eine Gerade, die durch zwei Punkte des Graphen von f läuft, sagen wir durch die Punkte $(a, f(a))$ und $(x, f(x))$. Die Steigung einer solchen Sekanten ist (vgl. Abbildung 35)

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \,. \tag{6}$$

Mit $x \to a$ verschiebt sich die Sekante immer mehr zur Tangente in $(a, f(a))$. Die Steigung der Tangenten ist also der Grenzwert des *Differenzenquotienten* (6) für $x \to a$.

3.1.1 Definition Eine Funktion f heißt *differenzierbar* in $a \in D(f)$, wenn der Grenzwert

$$f'(a) = \frac{d}{dx} f(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

existiert.

f heißt *differenzierbar auf* $M \subset D(f)$, wenn f in allen $a \in M$ differenzierbar ist.

Die Funktion f' heißt *Ableitung* von f.