## 1.11 Die Eulersche Zahl

Untersuchen wir nun eine andere Folge auf Konvergenz:

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$$

Zur Prüfung der Monotonie betrachten wir $\frac{a_n}{a_{n-1}}$ mit $n \geq 2$:

$$\begin{aligned}
\frac{a_n}{a_{n-1}} &= \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}} \\
&= \left(\frac{\frac{n+1}{n}}{\frac{n}{n-1}}\right)^n \cdot \frac{1}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^{-1}} \\
&= \left(\frac{(n+1)\cdot(n-1)}{n\cdot n}\right)^n \cdot \frac{n}{n-1} \\
&= \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n \cdot \frac{n}{n-1} \\
&= \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \cdot \frac{n}{n-1}
\end{aligned}$$

Benutzen wir die Bernoullische Ungleichung, Satz 1.5.3, mit $a = -\frac{1}{n^2} \geq -1$, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
\frac{a_n}{a_{n-1}} &= \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \cdot \frac{n}{n-1} \\
&\geq \left(1 - n \cdot \frac{1}{n^2}\right) \cdot \frac{n}{n-1} \\
&= \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{n}{n-1} \\
&= \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n}{n-1} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Also ist $a_n \geq a_{n-1}$, die Folge $(a_n)$ ist monoton wachsend.

Um zu zeigen, dass die Folge konvergiert, müssen wir nun nachrechnen, dass sie nach oben beschränkt ist. Dazu brauchen wir eine Verallgemeinerung der binomischen Formeln:

**1.11.1 Satz** (Binomischer Satz) Seien $x, y \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$. Es gilt

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \ ,$$

wobei die *Binomialkoeffizienten $n$ über $k$* gegeben sind durch

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} & \text{, falls } k \geq 1 \\ 1 & \text{, falls } k = 0 \end{cases}$$

**1.11.2 Beispiele**

$$(x+y)^2 = \binom{2}{0} x^2 y^0 + \binom{2}{1} x^1 y^1 + \binom{2}{2} x^0 y^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$(x+y)^3 = \binom{3}{0} x^3 y^0 + \binom{3}{1} x^2 y^1 + \binom{3}{2} x^1 y^2 + \binom{3}{3} x^0 y^3 = x^3 + 3x^2 y + 3xy^2 + y^3$$

Wenden wir den Binomischen Satz 1.11.1 auf unsere Folge $a_n$ an:

$$\begin{aligned} a_n &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} \left(\frac{1}{n}\right)^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k \end{aligned} \tag{1}$$

und betrachten wir die Summanden genauer:

$$\begin{aligned} \binom{n}{k}\left(\frac{1}{n}\right)^k &= \frac{\overbrace{n(n-1)\cdots(n-k+1)}^{k \text{ Faktoren}}}{k!\,\underbrace{n^k}_{k \text{ Faktoren}}} \\ &= \frac{1}{k!}\cdot\underbrace{\frac{n}{n}}_{\le 1}\cdot\underbrace{\frac{n-1}{n}}_{\le 1}\cdots\underbrace{\frac{n-k+1}{n}}_{\le 1} \le \frac{1}{k!} \end{aligned} \tag{2}$$

Für $k=0$ gilt $\frac{1}{k!}=1$ und für $1 \le k \le n$ haben wir

$$\begin{aligned} \frac{1}{k!} &= \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots k} \\ &= \frac{1}{1}\cdot\underbrace{\underbrace{\frac{1}{2}}_{\le\frac{1}{2}}\cdot\underbrace{\frac{1}{3}}_{\le\frac{1}{2}}\cdots\underbrace{\frac{1}{k}}_{\le\frac{1}{2}}}_{k-1 \text{ Faktoren}} \le \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \end{aligned}$$

Setzen wir dies in die Ausdrücke (1) und (2) ein, erhalten wir unter Verwendung des Satzes 1.6.3 über die geometrische Summe

$$\begin{aligned} a_n &\le \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \\ &\le 1 + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \\ &= 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{k} \\ &= 1 + \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} \\ &< 1 + \frac{1}{1-\frac{1}{2}} \\ &= 3 \end{aligned}$$

Es gilt also $a_n < 3$, die Folge ist nach oben beschränkt. Da sie ja auch monoton wachsend ist, folgt nach Satz 1.10.3, dass sie konvergiert.

Gegen welchen Grenzwert $(a_n)$ konvergiert, ist damit nicht klar, das lässt sich auch gar nicht so leicht angeben. Setzen wir einige Zahlen ein, erhalten wir die Folge

$$2, \frac{9}{4}, \frac{64}{27}, \frac{625}{256}, \ldots \quad \approx \quad 2, 2.25, 2.370, 2.441, \ldots \ .$$

Tatsächlich können wir den Grenzwert nicht als Bruch darstellen (er ist ähnlich wie $\sqrt{2}$ oder die Zahl $\pi$ irrational).

Dieser Grenzwert ist aber eine der wichtigsten Konstanten der Mathematik:

**1.11.3 Definition** Der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ heißt *Eulersche Zahl* und wird mit $e$ bezeichnet.

Eine numerische Approximation für $e$ kann man über die Folge $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ natürlich recht leicht ausrechnen (man muss nur ein großes $n$ einsetzen), es ist $e \approx 2.71828$.

# 2 Funktionen

## 2.1 Funktionen und Graphen

**2.1.1 Definition** Eine *Funktion* $f$ ist eine Vorschrift, die jedem Wert $z$ aus einem *Definitionsbereich* $D(f)$ genau einen Wert $f(z)$ zuordnet.

Der *Wertebereich* $W(f)$ von $f$ ist die Menge aller Werte die $f$ annimmt:

$$W(f) = \{w : w = f(z) \text{ für ein } z \in D(f)\} \ .$$

Im *Graph* einer Funktion werden die Werte $x$ und $f(x)$ gegeneinander aufgetragen.

Ist $D(f) \subset \mathbb{C}$ und hat die Funktion komplexe Werte, ist dieser Graph vierdimensional — wir sind also nicht in der Lage, diesen Graph zu zeichnen! Liegt sowohl Definitions- als auch Wertebereich in $\mathbb{R}$, so hat der Graph zwei Dimensionen, in diesem Fall ist der Graph eine oft sehr nützliche Veranschaulichung der dargestellten Funktion.

**2.1.2 Beispiele** **(1)** $f(z) = z^2$

$f$ kann für alle reellen oder komplexen Zahlen berechnet werden.

Definiert man $f$ nur auf den reellen Zahlen, also $D(f) = \mathbb{R}$, nimmt $f$ nur nicht-negative Werte an, dann gilt also $W(f) = [0, \infty[$.

Üblicherweise schreibt man $f(x)$ wenn $f$ auf reellen und $f(z)$, wenn $f$ auf komplexen Zahlen betrachtet wird. Grundsätzlich ist es aber natürlich egal, wie man diese Variable nennt.

Einige Funktionswerte in $\mathbb{R}$:

| $x =$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x) =$ | $4$ | $1$ | $0$ | $1$ | $4$ |

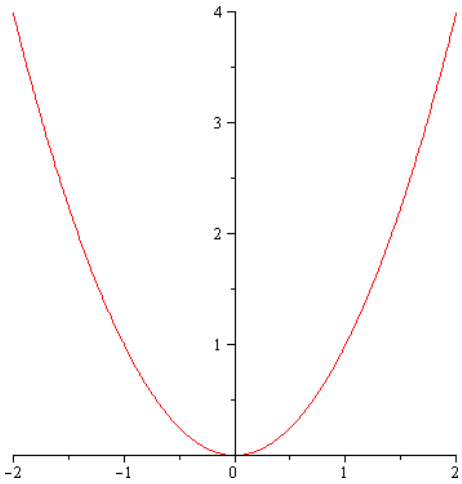


Abbildung 5: $f(x) = x^2$ mit $x \in \mathbb{R}$

**(2)** $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ mit $D(f) = [-1, 1]$

Für $D(f) = [-1, 1]$ gilt $W(f) = [0, 1]$, für andere reelle Zahlen ist $f$ nicht definiert.

| $x =$ | $-2$ | $-1$ | $-\frac{1}{2}$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x) =$ | $-$ | $0$ | $\sqrt{\frac{3}{4}}$ | $1$ | $\sqrt{\frac{3}{4}}$ | $0$ | $-$ |

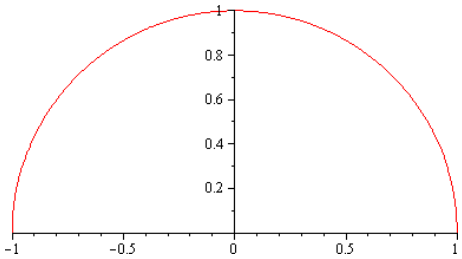


Abbildung 6: Der Graph von $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ mit $x \in [-1, 1]$ ist ein Halbkreis.

**(3)** Die Betragsfunktion $f(x) = |x|$ mit $D(f) = \mathbb{R}$ oder $f(z) = |z|$ mit $D(f) = \mathbb{C}$.

Hier ist sowohl bei der reellen als auch bei der komplexen Betragsfunktion $W(f) = [0, \infty[$. Im Komplexen ist der Graph dreidimensional.

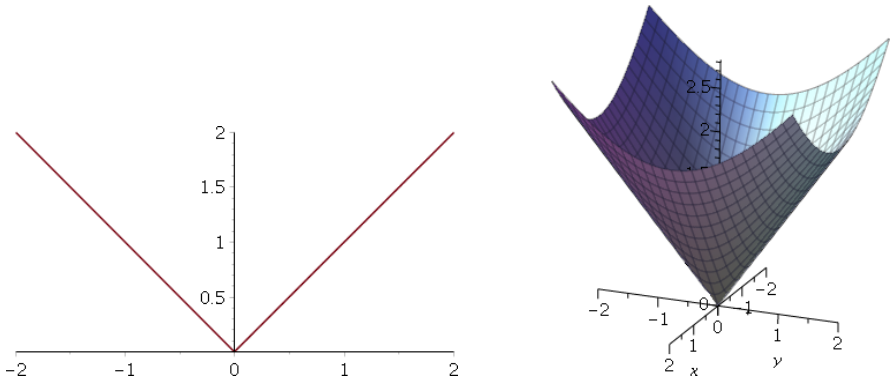


Abbildung 7: Die Betragsfunktion reeller und komplexer Zahlen.

## 2.2 Wichtige Funktionen

**(1)** **Geraden**:

Die allgemeine Darstellung einer Geraden ist die *Geradengleichung*

$$f(z) = az + b \qquad \text{mit } a, b \in \mathbb{C}.$$

$f(z)$ kann für alle komplexen oder reellen Zahen berechnet werden.

Für reelle $a, b$ und $z$ ist die Interpretation der Werte $a$ und $b$ recht einfach: $a$ ist die Steigung der Geraden, $b$ die Verschiebung der Geraden nach oben oder unten.

Ein einfaches aber oft auftretendes Beispiel ist die *Identität* $f(z) = z$ oder die *konstante Funktion* $f(z) = c$.

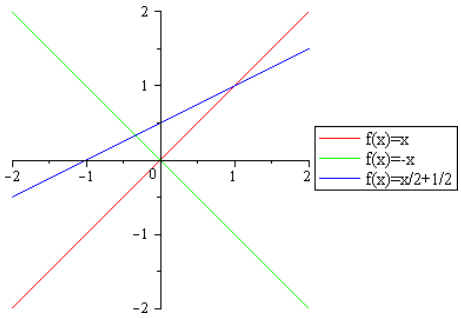


Abbildung 8: $f(x) = x, -x, \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ $(x \in \mathbb{R})$

**(2)** **Potenzen**:

Potenzen sind zum Beispiel

$$f(z) = z^2\ ,\ f(z) = z^3\ ,\ f(z) = z^4\ ,\ \ldots,$$

also die Funktionen

$$f(z) = z^n \qquad \text{mit } n \in \mathbb{N}_0.$$

$f$ kann für alle komplexen oder reellen Zahlen berechnet werden.

Für $f(x) = x^n$ mit $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ ist

$$W(f) = \begin{cases} [0, \infty[ & \text{, falls } n \text{ gerade,} \\ \mathbb{R} & \text{, falls } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

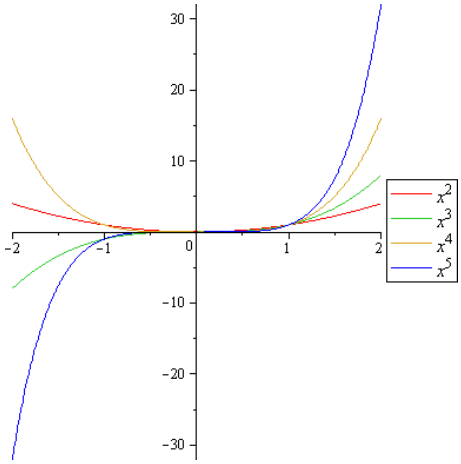


Abbildung 9: $f(x) = x^2, x^3, x^4, x^5$ $(x \in \mathbb{R})$

**(3) Kehrwert**:

$$f(z) = z^{-1} = \frac{1}{z}$$

$f$ kann für alle komplexen oder reellen Zahlen außer der Null berechnet werden und kann alle diese Werte, ebenfalls außer Null, annehmen.

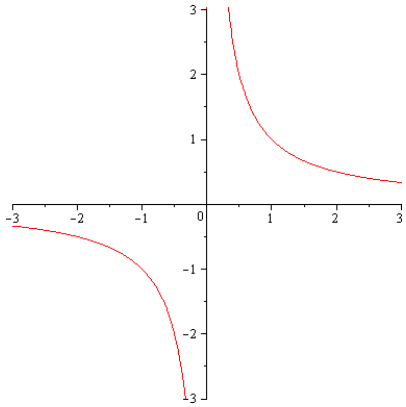


Abbildung 10: $f(x) = \frac{1}{x}$ $(x \in \mathbb{R})$

**(4) Wurzeln (in $\mathbb{R}$)**:

$f(x) = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$ kann, falls $n$ ungerade ist, für alle reellen Zahlen definiert werden. Ist $n$ gerade, kann $f$ nur für nicht-negative Werte definiert werden.

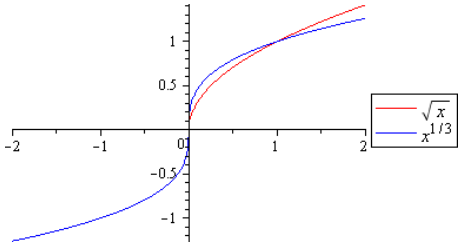


Abbildung 11: $f(x) = \sqrt{x}$ und $f(x) = \sqrt[3]{x}$

**(5) Logarithmen (in $\mathbb{R}$)**:

$f(x) = \log_b x$ kann für positive $x > 0$ berechnet werden. Für $D(f) = ]0, \infty[$ nimmt $f$ alle reellen Werte an: $W(f) = \mathbb{R}$.

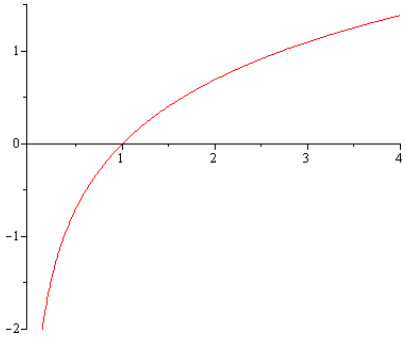


Abbildung 12: $f(x) = \log_e x$

**(6) Exponentialfunktion (in $\mathbb{R}$)**:

Die *Exponentialfunktion* ist die Funktion

$$f(x) = e^x \ ,$$

wobei $e$ die Eulersche Zahl (vgl. Def. 1.11.3) bezeichnet.

$e^x$ ist für alle reellen Zahlen definiert, nimmt aber nur positive Werte an.

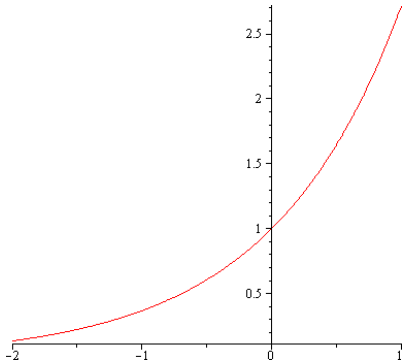


Abbildung 13: $f(x) = e^x$

Wie wir sehen werden, ist die Exponentialfunktion zur Basis der Eulerschen Zahl $e$ eine der wichtigsten Funktionen der Mathematik und der Naturwissenschaften. Entsprechend ist auch der Logarithmus zur Basis $e$ besonders wichtig. Wir definieren deshalb eine abkürzende Schreibweise:

**2.2.1 Definition** Der *natürliche Logarithmus* ist der Logarithmus zur Basis $e$,

$$\ln x = \log_e x \ .$$

**2.2.2 Beispiel** Exponentialfunktionen spielen vor allem bei Wachstums- oder Zerfallsprozessen eine große Rolle.

Als Anfang 2020 das "Corona-Virus" SARS-CoV2 die Covid-19-Pandemie auslöste, stiegen überall auf der Welt die Fallzahlen dramatisch an. Der Begriff "exponentielles Wachstum" wurde auch von vielen nicht-wissenschaftlichen Medien verwendet. Tatsächlich beschreiben Exponentialfunktionen alle möglichen Wachstums- oder Zerfallsprozesse, wie die Vermehrung von Tieren oder Krankheitserregern, den Zerfall radioaktiver Isotope oder die Vermehrung von Geld auf einem Konto durch Zins- und Zinseszins.

In den Wochen nach den ersten Erkrankungen in Deutschland konnte sich der Erreger recht ungehemmt ausbreiten. Als dann die Schutzmaßnahmen griffen, wurde die Ausbreitung deutlich verlangsamt, ein exponentielles Wachstum fand in der Folge erst einmal nicht mehr statt.

Schauen wir uns daher die Situation zu Beginn der Ausbreitung in Deutschland an[2], z.B. die ersten drei Wochen im März 2020 (Abbildung 14). Die Funktion $f$ soll die Anzahl der Infektionen im März beschreiben.

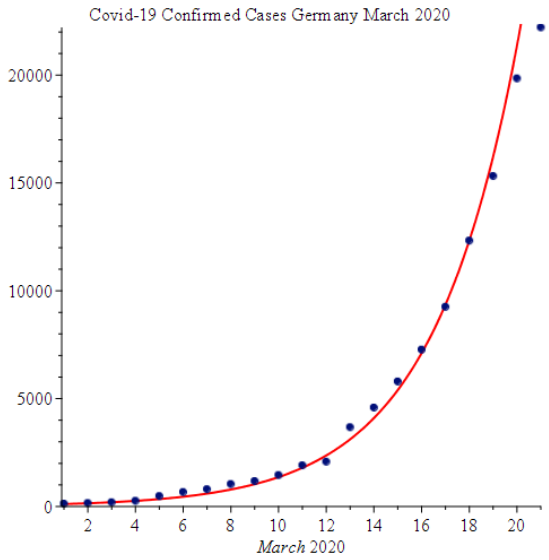


Abbildung 14: Blau: Infektionen mit SARS-CoV2 in Deutschland, 1.–21. März 2020, Rot: modellierte Exponentialfunktion

Da es an den Wochenenden regelmäßig Verzögerungen bei der Datenübermittlung durch die Gesundheitsämter gab, betrachten wir die Situation nicht am 1.3.2020 (ein Sonntag), sondern am ersten Mittwoch des Monats, dem 4.3.2020. Zu diesem Zeitpunkt gab es 262 bestätigte Fälle.

[2] JHU CSSE COVID-19 Data, `https://github.com/CSSEGISandData/COVID-19` (time series/confirmed global)

Genau zwei Wochen später, am 18.3.2020 wurden bereits 12 327 Fälle bestätigt:

$$f(4) = 262 \ , \qquad f(18) = 12327 \ .$$

Wir beschreiben das Wachstumsverhalten durch einen *Exponentialansatz*:

$$f(t) = A \cdot e^{Bt}$$

Wir haben also

$$\begin{aligned} f(4) = Ae^{4B} = 262 \qquad &\Longrightarrow \qquad \frac{Ae^{4B}}{262} = 1 \\ f(18) = Ae^{18B} = 12327 \qquad &\Longrightarrow \qquad \frac{Ae^{18B}}{12327} = 1 \end{aligned} \tag{3}$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \frac{Ae^{4B}}{262} = \frac{Ae^{18B}}{12327} \qquad &\Longleftrightarrow \qquad \frac{12327}{262} = \frac{Ae^{18B}}{Ae^{4B}} = e^{14B} \\ &\Longleftrightarrow \qquad 14B = \ln \frac{12327}{262} \\ &\Longleftrightarrow \qquad B = \frac{1}{14} \ln \frac{12327}{262} \approx 0.275 \end{aligned}$$

Hieraus können wir $A$ leicht berechnen: Aus Gleichung (3) folgt

$$A = \frac{262}{e^{4B}} \approx 87.182$$

Insgesamt ist daher (Abbildung 14)

$$f(t) \approx 87.182\, e^{0.275\, t} \ .$$

Bei solchen Wachstumsprozessen (analog bei Zerfallsprozessen) betrachtet man gerne die *Verdoppeltungszeit* (bei Zerfallsprozessen die *Halbwertszeit*), in der sich die Probe verdoppelt (oder eben halbiert): Für welches $t_D$ ist $f(t + t_D) = 2 \cdot f(t)$ ?

$$\begin{aligned} f(t + t_D) = 2 \cdot f(t) \qquad &\Longleftrightarrow \qquad Ae^{B(t+t_D)} = 2Ae^{Bt} \\ &\Longleftrightarrow \qquad e^{Bt_D} = 2 \\ &\Longleftrightarrow \qquad Bt_D = \ln 2 \end{aligned}$$

Also ist

$$t_D = \frac{\ln 2}{B} \approx 2.52 \ ,$$

d.h., alle ca. $2\frac{1}{2}$ Tage verdoppelte sich zu diesem Zeitpunkt die Zahl der Infektionen.

**(7) Trigonometrische Funktionen (in $\mathbb{R}$):**

Trigonometrische Funktionen wie $\sin x$ und $\cos x$ stehen üblicherweise in Zusammenhang mit Winkeln.

Während im Alltag Winkel meistens in Grad angegeben werden, werden Winkel wissenschaftlich im *Bogenmaß* gemessen. Dabei wird der Winkel als die Länge des zugehörigen Kreisbogens eines Kreises mit Radius 1 angegeben.

Da ein Kreis mit Radius 1 einen Umfang von $2\pi$ hat, entspricht dem Vollwinkel von 360° also der Winkel $2\pi$.

| 0° | 30° | 45° | 90° | 180° | 360° |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $2\pi$ |

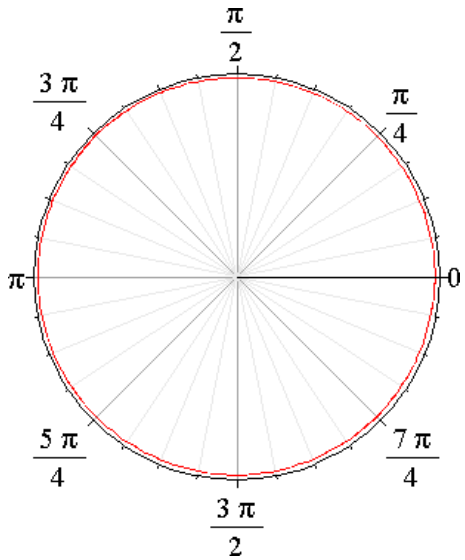


Abbildung 15: Winkel im Bogenmaß

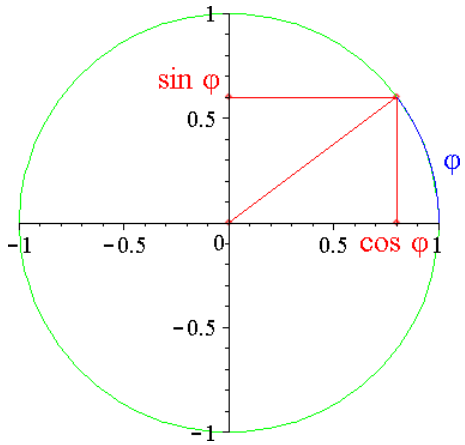


Abbildung 16: Sinus und Cosinus eines Winkels $\varphi$

Die Sinus- und Cosinus-Funktionen sind anschaulich die Längen der beiden Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks, das in einen Kreis mit Radius 1 eingeschrieben ist (Abbildung 16).

| $x$ | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | $\pi$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sin x$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ | $-1$ | $0$ |
| $\cos x$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-1$ | $0$ | $1$ |

Die beiden Funktionen $\sin x$ und $\cos x$ können für alle reellen Zahlen berechnet werden, nehmen aber nur Werte aus dem Intervall $[-1, 1]$ an.

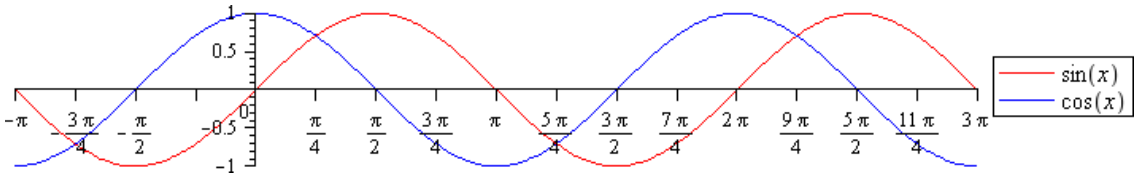


Abbildung 17: $\sin x$ und $\cos x$

**2.2.3 Satz** (Rechenregeln)

$$\begin{aligned}
\sin(-x) &= -\sin x \\
\cos(-x) &= \cos x \\
\sin(x \pm 2\pi) &= \sin x && (4) \\
\cos(x \pm 2\pi) &= \cos x && (5) \\
(\sin x)^2 + (\cos x)^2 &= 1
\end{aligned}$$

Die Gleichungen (4) und (5) besagen, dass sich die Werte von $\sin x$ und $\cos x$ mit einer *Periode* der Länge $2\pi$ wiederholen. Sinus und Cosinus nennt man deshalb auch $2\pi$-*periodisch*. Es genügt daher, die Funktionen im Intervall $[0, 2\pi]$ zu kennen.

Weitere trigonometrische Funktionen ergeben sich aus $\sin x$ und $\cos x$. Der *Tangens* ist die Funktion

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

und der *Cotangens* ist

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\tan x}$$

(jeweils definiert für Werte, bei denen die Nenner ungleich 0 sind).

## 2.3 Polarkoordinaten

Als Anwendung der trigonometrischen Funktionen können wir auf die Anschauung komplexer Zahlen als Punkte der Ebene zurückkommen. Diese erlaubt nämlich auch eine weitere Darstellung komplexer Zahlen:

Real- und Imaginärteil von $z = x + iy \in \mathbb{C}$ stellen die „kartesischen Kordinaten“ $x$ und $y$ von $z$ in der Gaußschen Ebene dar.

Jede Zahl $z \in \mathbb{C}$ kann aber auch durch den Abstand vom Nullpunkt, also durch $r = |z|$, und durch den Winkel $\varphi$ mit $-\pi < \varphi \leq \pi$ über der positiven reellen Achse bestimmt werden.

Wir erhalten die *Polarkoordinaten* $r$ und $\varphi$.

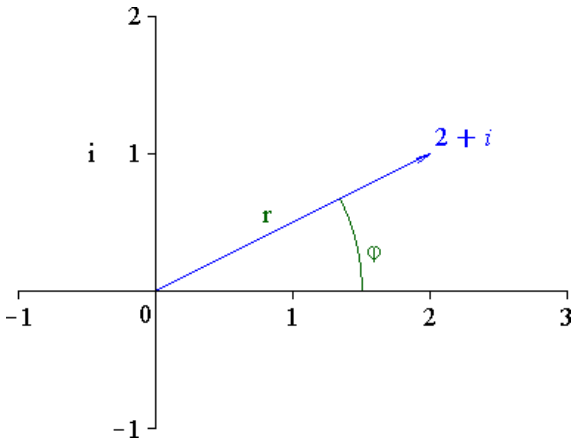


Abbildung 18: Polarkoordinaten komplexer Zahlen

Ist $z = 0$, so ist die Darstellung durch Polarkoordinaten nicht eindeutig, da der Winkel $\varphi$ beliebig ist.

Sei $z \neq 0$. Für $x = \operatorname{Re} z$ und $y = \operatorname{Im} z$ gilt wegen $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$x = r \cdot \cos\varphi \quad \Rightarrow \quad \cos\varphi = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

sowie

$$y = r \cdot \sin\varphi \quad \Rightarrow \quad \sin\varphi = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \ .$$

**2.3.1 Beispiele** **(1)** $z = i \quad \Rightarrow \quad r = |z| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$ , $\sin\varphi = \frac{1}{1} = 1$.
Wegen $\sin\frac{\pi}{2} = 1$ ist also $\varphi = \frac{\pi}{2}$ .

**(2)** $z = 1 + i \quad \Rightarrow \quad r = |z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ .
$\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$ gilt für $\varphi = \frac{\pi}{4}$ oder $\varphi = \frac{3\pi}{4}$, der Winkel ist im Intervall $]-\pi, \pi]$ also nicht eindeutig.
Da aber $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$ für $\varphi = \frac{\pi}{4}$ oder $\varphi = -\frac{\pi}{4}$ gilt, ist

$$\varphi = \frac{\pi}{4} \ .$$

**(3)** Ist $r = 2$ und $\varphi = \pi$, dann haben wir

$$\operatorname{Re} z = r\cos\varphi = 2\cos\pi = -2 \qquad \text{und} \qquad \operatorname{Im} z = r\sin\varphi = 2\sin\pi = 0 \ ,$$

also

$$z = -2 \ .$$

**2.3.2 Bemerkung** Hat $z \in \mathbb{C}$ die Polarkoordinaten $r$ und $\varphi$, dann gilt

$$\begin{aligned} z &= \operatorname{Re} z + i \cdot \operatorname{Im} z \\ &= r \cos\varphi + i \cdot r \sin\varphi \\ &= r(\cos\varphi + i \sin\varphi) \end{aligned}$$

## 2.4 Die komplexe Exponentialfunktion

Die Exponentialfunktion ist nicht nur wegen ihrer Bedeutung bei Wachstumsprozessen so interessant. Überraschend mag sein, dass in $\mathbb{C}$ ein Zusammenhang mit den trigonometrischen Funtionen existiert:

**2.4.1 Satz** (Eulersche Formel) Für $y \in \mathbb{R}$ gilt

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y \ .$$

Damit können wir $e^z$ für $z \in \mathbb{C}$ berechnen: mit $x, y \in \mathbb{R}$ und $z = x + iy$ gilt

$$e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y) \ .$$

**2.4.2 Beispiel**

$$e^{1+i\pi} = e^1(\underbrace{\cos\pi}_{=-1} + i \underbrace{\sin\pi}_{=0}) = -e$$

**2.4.3 Bemerkung** Nach der Eulerschen Formel können wir Sinus und Cosinus als Imaginär- und Realteil von $e^{iy}$ auffassen:

$$\operatorname{Re}\left(e^{iy}\right) = \cos y \qquad \text{und} \qquad \operatorname{Im}\left(e^{iy}\right) = \sin y$$

**2.4.4 Bemerkung** Aus Satz 2.4.1 können wir auch eine neue „Darstellung“ komplexer Zahlen gewinnen: Aus der Eulerschen Formel und Bemerkung 2.3.2 folgt nämlich

$$z = r(\cos\varphi + i \sin\varphi) = re^{i\varphi} \ .$$

Wenn also $z = x + iy$ die Darstellung einer komplexen Zahl in „kartesischen“ Koordinaten $x$ und $y$ ist, ist $z = re^{i\varphi}$ die Darstellung in Polarkoordinaten $r$ und $\varphi$.

---

Wir wissen bereits aus Satz 2.2.3, dass Sinus und Cosinus periodische Funktionen mit Periode $2\pi$ sind:

$$\begin{aligned} \sin(x + 2\pi) &= \sin x \ , \\ \cos(x + 2\pi) &= \cos x \ . \end{aligned}$$

In diesem Zusammenhang ist eine Folgerung aus der Eulerschen Formel überraschend:

$$e^{2\pi i} = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1$$

und damit

$$e^{z+2\pi i} = e^z \cdot e^{2\pi i} = e^z \ .$$

Also: