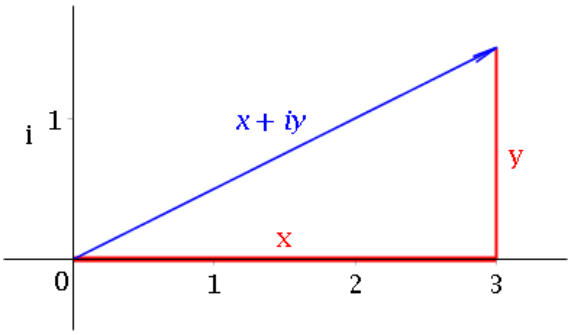

Abbildung 2: $|x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Da reelle Zahlen den Imaginärteil Null haben, kann man für $x \in \mathbb{R}$ die obige Definition einfacher formulieren:

$$|x| = \sqrt{x^2}$$

Leider ist diese Definition für reelle Zahlen oft unhandlich. Beispielsweise ist $|x-2| = \sqrt{(x-2)^2} = \sqrt{x^2 - 4x + 4}$ und mit solchen Wurzelausdrücken kann man eventuell nur schwer weiterrechnen.

Bei reellen Zahlen kann man den Betrag aber auch anders darstellen, was sich meist einfacher anwenden lässt:

1.7.3 Satz Der *Betrag* einer reellen Zahl x ist

$$|x| = \begin{cases} x & \text{, falls } x \geq 0 \\ -x & \text{, falls } x < 0 \end{cases}$$

Beim Rechnen mit Beträgen reeller Zahlen ist daher meist eine Fallunterscheidung erforderlich.

1.7.4 Beispiel Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt $|x - 2| < 1$?

1. Fall $x - 2 \geq 0 \;\Leftrightarrow\; x \geq 2$
Hier ist $|x - 2| = x - 2$, also

$$|x - 2| < 1 \;\Leftrightarrow\; x - 2 < 1 \;\Leftrightarrow\; x < 3\ .$$

$|x - 2| < 1$ gilt also für $x < 3$, falls $x \geq 2$ vorausgesetzt wird:

$$2 \leq x < 3$$

2. Fall $x - 2 < 0 \;\Leftrightarrow\; x < 2$
Hier ist $|x - 2| = -x + 2$, also

$$|x - 2| < 1 \;\Leftrightarrow\; -x + 2 < 1 \;\Leftrightarrow\; -x < -1 \;\Leftrightarrow\; x > 1$$

$|x - 2| < 1$ gilt also für $x > 1$, falls $x < 2$ vorausgesetzt wird:

$$1 < x < 2$$

Insgesamt haben wir also $|x - 2| < 1 \;\Leftrightarrow\; 1 < x < 3$.

Ganz allgemein gilt: Sei a eine reelle Zahl und $r > 0$. Dann ist für reelle x

$$|x - a| < r \;\Leftrightarrow\; a - r < x < a + r\ .$$

Natürlich können wir auch die Frage stellen, für welche *komplexen* Zahlen $z \in \mathbb{C}$ eine Ungleichung wie $|z-a| < r$ mit $a \in \mathbb{C}$ und $r \in \mathbb{R}$ gilt.

Dies lässt sich leicht anschaulich überlegen: $|z-a|$ ist der Abstand von z zu a, $|z-a| < r$ gilt also für alle z, deren Abstand von a kleiner als r ist — anders ausgedrückt: es handelt sich um die Zahlen, die in einem *Kreis* um a mit Radius r liegen (vgl. Abbildung 3).

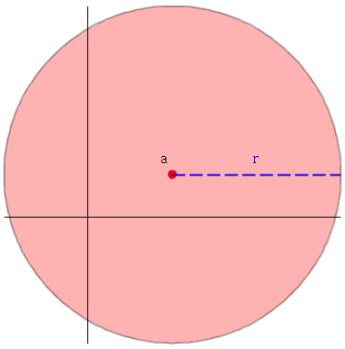

Abbildung 3: Die Punkte $z \in \mathbb{C}$ mit $|z-a| < r$ bilden eine Kreisscheibe um a mit Radius r.

Für reelle Zahlen $x \in \mathbb{R}$ gilt, wie man sich sehr leicht überlegt, $|x|^2 = x^2$. Für komplexe Zahlen sieht dies ein wenig anders aus:

Sei $z = x + iy$. Es gilt

$$\begin{aligned} z \cdot \overline{z} &= (x+iy)(x-iy) \\ &= x^2 + i(xy - xy) - i^2 y^2 \\ &= x^2 + y^2 \\ &= |z|^2 \ , \end{aligned}$$

also

$$|z|^2 = z \cdot \overline{z} \ .$$

1.8 Folgen

1.8.1 Definition Die Zahlen $(a_n) = a_1, a_2, a_3, \ldots$, bei denen jeder Zahl $n \in \mathbb{N}$ oder $n \in \mathbb{N}_0$ eine reelle oder komplexe Zahl a_n zugeordnet wird, heißt *Folge*.

1.8.2 Beispiele **(1)** $\left(\frac{1}{n}\right) = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ ist eine Folge mit $a_n = \dfrac{1}{n}$

(2) $((-1)^n) = -1, 1, -1, 1, -1, 1, \ldots$

(3) $(n + ni) = 1 + i, 2 + 2i, 3 + 3i, \ldots$

(4) (a_n) mit

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 \\ a_1 &= 1 \\ a_n &= a_{n-1} + a_{n-2} \quad \text{für } n \geq 2 \end{aligned}$$

heißt *Fibonacci-Folge*:

$$(a_n) = 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \ldots$$

1.8.3 Definition Eine Folge (a_n) heißt *beschränkt*, wenn eine reelle Konstante C existiert, so dass

$$|a_n| \leq C \qquad \text{für alle } n.$$

Eine reelle Folge heißt *nach oben (nach unten) beschränkt*, wenn eine reelle Konstante C existiert, so dass

$$a_n \leq C \qquad (a_n \geq C) \qquad \text{für alle } n.$$

1.8.4 Beispiele **(1)** $\left(\frac{1}{n}\right)$ ist z.B. durch $C = 5$ (oder $C = 2$ oder $C = 1$) beschränkt.

(2) $((-1)^n)$ ist beschränkt, da $|(-1)^n| = |-1|^n = 1^n \leq 1$.

(3) $(n + ni)$ ist unbeschränkt.

(4) Die Fibonacci-Folge ist nach unten beschränkt.

(5) Die Fibonacci-Folge ist unbeschränkt. (Offensichtlich ist eine reelle Folge genau dann beschränkt, wenn sie nach oben *und* unten beschränkt ist.)

1.8.5 Definition Eine Folge (a_n) mit $a_n \in \mathbb{R}$ heißt...

- ... *monoton wachsend*, wenn $a_n \leq a_{n+1}$ für alle n.
- ... *monoton fallend*, wenn $a_n \geq a_{n+1}$ für alle n.
- ... *streng monoton wachsend*, wenn $a_n < a_{n+1}$ für alle n.
- ... *streng monoton fallend*, wenn $a_n > a_{n+1}$ für alle n.

1.8.6 Beispiele **(1)** $\left(\frac{1}{n}\right)$ ist streng monoton fallend:
Am leichtesten kann man die Monotonie oft überprüfen, wenn man den Quotienten $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ berechnet.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1} < 1 \qquad \Rightarrow \qquad a_{n+1} < a_n \ ,$$

(a_n) ist also streng monoton fallend.

(2) (2^n) ist streng monoton wachsend:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2 > 1 \qquad \Rightarrow \qquad a_{n+1} > a_n \ .$$

(3) Die Fibonacci-Folge ist monoton wachsend, aber nicht streng monoton wachsend (da $a_0 = a_1 = 1$).

(4) $((-1)^n)$ ist nicht monoton.

1.9 Konvergenz

Betrachten wir die Folge $\left(\frac{1}{n}\right) = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$. Die Folgenglieder nähern sich immer weiter dem Wert 0. Diese „Konvergenz“ wollen wir nun exakter definieren.

Zuerst eine Vorbereitung:

1.9.1 Definition Sei $\varepsilon > 0$. Eine *reelle ε-Umgebung* eines Punktes $a \in \mathbb{R}$ ist die Menge

$$U_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbb{R} : |a - x| < \varepsilon\} \ .$$

Eine *komplexe ε-Umgebung* von $a \in \mathbb{C}$ ist analog

$$U_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbb{C} : |a - x| < \varepsilon\} \ .$$

Wie wir auf Seite 8 gesehen haben, gilt im Reellen

$$U_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbb{R} : |a - x| < \varepsilon\} = \{x \in \mathbb{R} : a - \varepsilon < x < a + \varepsilon\} =]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\ ,$$

$U_\varepsilon(a)$ bezeichnet in $\mathbb{R}$ also ein Intervall.

Im Komplexen bezeichnet $U_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbb{C} : |a - x| < \varepsilon\}$ dagegen einen Kreis um a mit Radius ε.

„Konvergiert“ nun eine Folge gegen einen Wert a (im Beispiel $\left(\frac{1}{n}\right)$ ist $a = 0$) und betrachtet man eine ε-Umgebung um a (mit beliebigem $\varepsilon > 0$), so liegen alle Folgenglieder, eventuell bis auf die ersten, in dieser Umgebung — egal wie klein die Umgebung ist. Bei besonders kleinen Umgebungen werden i.a. mehr Folgenglieder außerhalb der Umgebung liegen, in jedem Fall ist deren Zahl aber endlich.

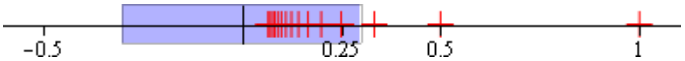

Abbildung 4: Die Folge $(\frac{1}{n})$ mit einer ε-Umgebung um 0: ab einer gewissen Zahl von Folgegliedern liegen alle innerhalb der Umgebung

Präzisieren wir dies:

1.9.2 Definition Eine Folge (a_n) heißt *konvergent gegen einen Grenzwert* a, wenn in jeder ε-Umgebung von a mit $\varepsilon > 0$ alle Folgenglieder a_n mit $n > n_0 \in \mathbb{N}$ liegen (also alle ab einer gewissen Stelle):

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \qquad \text{oder} \qquad a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$$

Eine Folge heißt *divergent*, wenn sie nicht konvergiert.

1.9.3 Beispiel Betrachten wir wieder

$$\left(\frac{1}{n}\right) = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\ .$$

Unsere Vermutung ist, dass $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, also $a = 0$.

Sei z.B. $\varepsilon = \frac{1}{10}$. Es gilt

$$|a_n - a| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{10} \qquad \text{für } n > n_0 = 10.$$

Nur die ersten 10 Folgeglieder liegen also außerhalb von $U_\varepsilon(0)$.

Verkleinern wir die Umgebung und betrachten wir $\varepsilon = \frac{1}{100}$. Dann gilt (s.o.)

$$|a_n - a| = \frac{1}{n} < \frac{1}{100} \qquad \text{für } n > n_0 = 100.$$

Ab dem 101sten Folgeglied liegen nun also alle Folgenglieder in $U_\varepsilon(0)$.

Ganz analog haben wir für alle $\varepsilon > 0$

$$|a_n - a| = \frac{1}{n} < \varepsilon \qquad \text{für } n > \frac{1}{\varepsilon}$$

und daher

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0\ .$$

1.9.4 Satz (Rechenregeln für konvergente Folgen) Sind (a_n) und (b_n) konvergente Folgen mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, dann gilt

(1) $(a_n \pm b_n)$ konvergiert mit $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = a \pm b$,

(2) $(a_n \cdot b_n)$ konvergiert mit $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$.

(3) Falls $b_n \neq 0$ für alle n und $b \neq 0$, dann konvergiert $\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)$ mit $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{a}{b}$.

1.9.5 Beispiele **(1)** $\left(\dfrac{n+1}{n^2}\right) = 2, \dfrac{3}{4}, \dfrac{4}{9}, \dfrac{5}{16}, \ldots$

Es gilt $\frac{n+1}{n^2} = \frac{n}{n^2} + \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} + \left(\frac{1}{n}\right)^2$, also

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n^2} &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n} + \left(\frac{1}{n}\right)^2\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} + \left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)^2\\ &= 0 + 0^2\\ &= 0\end{aligned}$$

(2) $\left(\dfrac{n}{n+1}\right) = \dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \ldots$

Da $\frac{n}{n+1} = \frac{1}{\frac{n+1}{n}} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}}$, folgt

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\\ &= \frac{1}{1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}\\ &= \frac{1}{1+0}\\ &= 1\end{aligned}$$

(3) Betrachten wir die Folge (q^n) mit einem $q \in \mathbb{C}$.

Hier müssen wir mehrere Fälle unterscheiden:

(a) $|q| > 1$:
Ist $|q| > 1$, dann ist $|q| = 1 + d$ mit einem $d > 0$ und mit der Bernoullischen Ungleichung 1.5.3 folgt

$$|q|^n = (1+d)^n \geq 1 + nd \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty\ .$$

Daraus folgt offenbar $|q|^n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ und somit auch

$$(q^n) \quad \text{divergiert} \quad \text{für } |q| > 1.$$

(b) $0 < |q| < 1$:
Ist $0 < |q| < 1$, dann folgt $\frac{1}{|q|} > 1$ und es ist $\frac{1}{|q|} = 1 + d$ mit einem $d > 0$ und unter Verwendung der Bernoullischen Ungleichung erhalten wir nun

$$|q^n| = \frac{1}{(1+d)^n} \leq \frac{1}{1+nd} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\ .$$

Da $|q^n| \geq 0$ folgt $\lim\limits_{n\to\infty} |q^n| = 0$ und deshalb

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0 \qquad \text{für } |q| < 1.$$

(c) $q = 0$:
In diesem Fall ist die Sache besonders einfach:

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \lim_{n\to\infty} 0 = 0 \ .$$

(d) $|q| = 1$:
Für die Punkte mit $|q| = 1$ ist die Konvergenz von q^n nicht so eindeutig zu beantworten.
Für $q = 1$ ist beispielsweise $q^n = 1$ und daher $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 1$.
Für $q = -1$ ist andererseits $q^n = (-1)^n$, die Folge ist also divergent, genau wie z.B. (i^n) oder andere Folgen (q^n) mit $|q| = 1$.

1.10 Konvergenz- und Divergenzkriterien

1.10.1 Satz Eine unbeschränkte Folge ist divergent.

1.10.2 Beispiele **(1)** $(2^n) = 1, 4, 8, 16, \ldots$ ist unbeschränkt, also divergent.

(2) $((-1)^n) = -1, 1, -1, 1, \ldots$ ist beschränkt (denn $|(-1)^n| \leq 1$), aber auch divergent.

Das letzte Beispiel zeigt, dass die Umkehrung des Satzes nicht gilt: beschränkte Folgen müssen nicht konvergieren. Wir können aber dennoch ein Kriterium für Konvergenz finden:

1.10.3 Satz (Monotonieprinzip) Ist eine reelle Folge monoton und beschränkt, so ist sie konvergent. Genauer: Ist eine reelle Folge...

- ...monoton wachsend und nach oben beschränkt,...
- ...monoton fallend und nach unten beschränkt,...

... so konvergiert sie.

Schauen wir uns ein Beispiel an, bei dem wir auch gleich eine weitere Bezeichnung kennenlernen:

1.10.4 Definition Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei die *Fakultät von n* definiert als

$$\begin{aligned} n! &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n \qquad \text{für } n \geq 1 \\ \text{und} \qquad 0! &= 1 \ . \end{aligned}$$

1.10.5 Beispiel Sei $(a_n) = \left(\dfrac{2^n}{n!}\right)$. Ist (a_n) monoton?

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} \\ &= \frac{2^{n+1} n!}{(n+1)!\, 2^n} \\ &= \frac{2}{n+1} \\ &\leq \frac{2}{2} \qquad \text{, da } n \geq 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Folglich ist $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1 \;\Rightarrow\; a_{n+1} \leq a_n$ und (a_n) ist demnach monoton fallend.

Offenbar ist $a_n = \frac{2^n}{n!} \geq 0$, die Folge ist also nach unten beschränkt und nach dem Monotonieprinzip folgt:

$$\left(\frac{2^n}{n!}\right) \text{ konvergiert.}$$

Das Problem bei dieser Überlegung ist: wir wissen zwar, dass die Folge konvergiert, kennen aber den Grenzwert nicht.

Leider gibt es keine allgemeine Möglichkeit, den Grenzwert einer Folge zu berechnen. Dies muss bei jeder Folge neu überlegt werden. Den Grenzwert des letzten Beispiels könnte man wie folgt bestimmen:

Es gilt

$$a_n = \frac{2^n}{n!} = \frac{2 \cdot 2^{n-1}}{n \cdot (n-1)!} = \frac{2}{n} \cdot a_{n-1} \ .$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} \cdot \lim_{n\to\infty} a_{n-1} \\ &= 0 \cdot \lim_{n\to\infty} a_{n-1} \\ &= 0 \end{aligned}$$