J.W. Goethe Universität
R. Neininger

WS 2019/20
Blatt 5

Übungen zu
Stochastische Analyse von Algorithmen

Aufgabe 17. Betrachten Sie einen zufälligen Graphen $G(n,p)$ mit $p = p(n) = o(n^{-3/2})$. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(G(n,p) \text{ hat eine Zusammenhangskomponente mit wenigstens 3 Ecken}) = 0.$$

Hinweis: Verwenden Sie die *first moment method.*

Aufgabe 18. Eine Teilmenge I der Ecken eines Graphen G heißt *unabhängig* in G, falls keine zwei Ecken aus I in G benachbart sind. Die Kardinalität einer größten unabhängigen Menge in G heißt *Unabhängigkeitszahl von* G und wird mit $\alpha(G)$ bezeichnet. Der Graph G habe n Ecken mit Graden $d_1, \ldots, d_n \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\alpha(G) \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+d_i}.$$

Aufgabe 19. Betrachten Sie einen zufälligen Graphen $G(n,p)$ mit $p = p(n) = (\log\log n)/n$. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(G(n,p) \text{ enthält ein Dreieck}) = 1.$$

Hinweis: Betrachten Sie die Anzahl der Dreiecke in $G(n,p)$, und verwenden Sie die *second moment method.*

Aufgabe 20. Der n-dimensionale (diskrete) Hyperwürfel ist der Graph mit Eckenmenge $\{0,1\}^n$, wobei zwei Ecken $x = (x_1, \ldots, x_n)$ und $y = (y_1, \ldots, y_n)$ durch eine Kante genau dann verbunden sind, wenn ihr Hamming-Abstand $d_H(x,y) := \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{x_i \neq y_i\}} = 1$ ist. Ein zufälliger Hyperwürfel $H(n,p)$ entsteht aus dem n-dimensionalen Hyperwürfel, indem jede der möglichen Kanten unabhängig mit Wahrscheinlichkeit $p \in [0,1]$ beibehalten wird (sonst gelöscht wird). Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(H(n,p) \text{ ist zusammenhängend}) = \begin{cases} 1, & \text{falls } p > 1/2 \\ 0, & \text{falls } p < 1/2. \end{cases}$$

Zeigen Sie zumindest einen der beiden Fälle.

Abgabe am Dienstag, den 14. Januar, vor der Vorlesung.