

## Übungen zu Stochastische Analyse von Algorithmen

**Aufgabe 13.** In einem unendlichen, vollständigen  $b$ -ären Baum,  $b \geq 2$ , mit Wurzel  $w$  werde jede Kante mit einer Marke  $0$  oder  $1$  markiert, wobei die Marken zufällig seien und unabhängig die Werte  $1$  mit Wahrscheinlichkeit  $p \in [0, 1]$  und  $0$  mit Wahrscheinlichkeit  $1 - p$  annehmen. Wir führen eine *depth first search*, startend in  $w$ , in diesem Baum durch, wobei lediglich die mit  $0$  markierten Kanten verfolgt werden. (Mit  $1$  markierte Kanten werden ignoriert.) Sei  $N$  die Anzahl der Knoten, die von dieser *depth first search* besucht werden.

Versuchen Sie, notwendige und hinreichende Bedingungen für  $\mathbb{E} N < \infty$  anzugeben. Stellen Sie  $\mathbb{P}(N < \infty)$  als Funktion von  $b$  und  $p$  dar. Berechnen Sie  $\mathbb{P}(N < \infty)$  explizit im Falle  $b = 2$  und  $p < 1/2$ .

**Aufgabe 14.** Seien  $x_1, \dots, x_n \in [0, 1]^3$ . Geben Sie eine Heuristik an, die die Schranke

$$\text{tsp}(x_1, \dots, x_n) \leq Cn^{2/3} + Dn^{1/3} + E$$

liefert mit reellen Konstanten  $C$ ,  $D$  und  $E$ . Verallgemeinern Sie dazu die Heuristik, die für Dimension 2 das Quadrat in Streifen zerlegt. Geben Sie explizite Werte für  $C$ ,  $D$  und  $E$  an.

**Aufgabe 15.** Seien  $N_i$  für  $i = 1, \dots, n/t_n$  wie in der Analyse der Laufzeit von Karps Heuristik für das *traveling salesman* Problem binomial  $B(n, t_n/n)$  verteilt. Berechnen Sie

$$\mathbb{E} \sum_{i=1}^{n/t_n} N_i^2 2^{N_i}$$

exakt, und vergleichen Sie mit den Schranken aus der Vorlesung.

*Hinweis:*  $N_i$  ist Summe von unabhängigen Bernoulli verteilten Zufallsvariablen.

**Aufgabe 16.** Zeigen Sie, dass für die Anzahl  $M$  der von der MATCH-Heuristik benötigten Kästen zum Packen von unabhängigen Zufallsvariablen  $X_1, \dots, X_n$  in  $[0, 1]$  für alle  $t > 0$  gilt

$$\mathbb{P}(|M - \mathbb{E} M| > t) \leq 2 \exp\left(-\frac{2t^2}{n}\right).$$

*Hinweis:* Verwenden Sie die Ungleichung von McDiarmid.

**Abgabe** am Dienstag, den 17. Dezember, vor der Vorlesung.