

Übungen zu Stochastische Analyse von Algorithmen

Aufgabe 9. Berechnen Sie für einen Galton–Watson Prozess $(Z_n)_{n \geq 0}$ mit *offspring*-Verteilung gegeben durch $\mathbb{P}(Z_1 = i) = p_i = p^i(1-p)$ für $i \geq 0$ mit $0 < p < 1$ folgende Größen: Die erzeugende Funktion $f(s) = \mathbb{E}[s^{Z_1}]$, $\mathbb{P}(Z_n = 0)$ sowie die Aussterbewahrscheinlichkeit q .

Aufgabe 10. Die *offspring*-Verteilung eines Galton–Watson Prozesses habe Mittelwert m , die Aussterbewahrscheinlichkeit des Prozesses sei q .

- (a) Geben Sie eine *offspring*-Verteilung zu beliebig vorgegebenen $m > 1$ und $q < 1$ an. (Dies bedeutet, dass der Mittelwert m keine Information über die Aussterbewahrscheinlichkeit q enthält.)
- (b) Geben Sie eine *offspring*-Verteilung zu beliebig vorgegebenen $q < 1$ und $m = \infty$ an.

Hinweis: Mit $p_k = ca^k$ für $k \geq 1$ können Sie passende Parameter $0 \leq p_0, a < 1$ sowie $c > 0$ für (a) finden.

Aufgabe 11. Für einen subkritischen Galton–Watson Prozess $(Z_n)_{n \geq 0}$ bezeichnen $|T| := \sum_{n=0}^{\infty} Z_n$ die Gesamtgröße der Population sowie g_Z und g_T die erzeugenden Funktionen von Z_1 bzw. von $|T|$. Zeigen Sie, dass gilt

$$g_T(s) = sg_Z(g_T(s)), \quad \mathbb{E}[|T|] = \frac{1}{1 - \mathbb{E}[Z_1]}.$$

Berechnen Sie g_T für den binären Galton–Watson Prozess, d.h. für die *offspring*-Verteilung gegeben durch $\mathbb{P}(Z_1 = i) = p_i$ mit $p_0 = 1-p$ und $p_2 = p$ mit $0 < p < 1$.

Aufgabe 12. Es werde wieder mit $|T|$ die Größe des Familienbaumes des binären Galton–Watson Prozesses aus Aufgabe 11 bezeichnet. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\mathbb{P}(|T| < \infty) = \begin{cases} 1, & \text{falls } p \leq 1/2, \\ \frac{1-p}{p}, & \text{falls } p > 1/2. \end{cases}$$

Zeigen Sie ferner, dass

$$\mathbb{P}(|T| = k) = \frac{1}{p} \mathbb{P}(S_0 = S_{k+1} = 0, S_i > 0 \text{ für } 1 \leq i \leq k), \quad k \in \mathbb{N},$$

wobei $(S_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine einfache Irrfahrt ist, d.h. $S_i = Y_1 + \dots + Y_i$ mit unabhängigen, identisch verteilten Zufallsvariablen Y_i mit $\mathbb{P}(Y_1 = 1) = 1 - \mathbb{P}(Y_1 = -1) = p$.

Abgabe am Dienstag, den 3. Dezember, vor der Vorlesung.