

Übungen zu Stochastische Analyse von Algorithmen

Aufgabe 5. Der zufällige Binärsuchbaum werde sukzessive von einer Folge unabhängiger, identisch uniform auf $[0, 1]$ verteilter Zufallsvariable aufgebaut. Sind n interne Knoten in den Baum eingefügt, so hat der Baum $n + 1$ externe Knoten und einer dieser externen Knoten wird durch den $n + 1$ -ten internen Knoten ersetzt. Zeigen Sie, dass alle externen Knoten mit derselben Wahrscheinlichkeit $1/(n + 1)$ vom $n + 1$ -ten internen Knoten ersetzt werden.

Dies bedeutet, dass Sie einen zufälligen Binärsuchbaum wie folgt generieren können: Man starte mit der Wurzel und ihren zwei externen Knoten. In jedem Schritt wird ein externer Knoten uniform gewählt und durch einen internen Knoten ersetzt.

Aufgabe 6. Ein zufälliger Binärsuchbaum werde von einer gleichverteilten Permutation $(\Pi_1, \dots, \Pi_n)$ von $\{1, \dots, n\}$ aufgebaut. Es bezeichne N_i die Anzahl der Knoten im Teilbaum, dessen Wurzel das Element Π_i ist für $1 \leq i \leq n$. Die Wurzel selbst werde zu N_i nicht mitgezählt. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\mathbb{E} N_i = \frac{2(n - i)}{i + 1}.$$

Aufgabe 7. Betrachten Sie die Situation aus Aufgabe 6. Es werde nun einer der n Knoten im Baum zufällig und gleichverteilt gewählt. Die Größe seines Teilbaums (ohne Wurzel) werde mit N bezeichnet. Zeigen Sie mit Hilfe des Ergebnisses von Aufgabe 6, dass

$$\mathbb{E} N \sim 2 \log n, \quad (n \rightarrow \infty).$$

Zeigen Sie ferner, dass $\mathbb{E} [N^a] = O(1)$ für jedes $a \in (0, 1)$ gilt.

Aufgabe 8. Bezeichne D_n die Tiefe des zuletzt eingefügten Knotens in einem zufälligen Binärsuchbaum mit n Knoten. Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{P}(D_n \geq k) \leq \frac{n^2}{2^k} \quad \text{für alle } n, k \geq 1$$

gilt. Schließen Sie daraus für die Höhe H_n des Baumes

$$\mathbb{P}(H_n \geq k) \leq \frac{n^3}{2^k} \quad \text{für alle } n, k \geq 1$$

sowie $\mathbb{E} H_n \leq 3 \log_2 n + O(1)$.

Hinweis: Benutzen Sie, dass nach Satz 5.5 gilt $\mathcal{L}(D_n) = \mathcal{L}(D_{n-1} + B_n)$, wobei B_n unabhängig von D_{n-1} und Bernoulli $B(\frac{2}{n})$ verteilt ist, sowie Induktion über n .

Abgabe am Dienstag, den 19. November, vor der Vorlesung.