

## Übungen zu Stochastische Analyse von Algorithmen

**Aufgabe PK1.** Geben Sie (mit Begründung) die Anzahl der

- (a) einfachen Irrfahrten      (b) einfachen, nichtnegativen Irrfahrten

von  $(0, 6)$  nach  $(2n, 4)$  an.

**Aufgabe PK2.** Es gelte  $n \rightarrow \infty$ . Kennzeichnen Sie wahre bzw. falsche Aussagen mit **W** bzw. **F**:

$\langle \quad \rangle \quad n \log(n) + 3n + 7 = O(n^2)$

$\langle \quad \rangle \quad \sum_{i=1}^n 1/i = \Theta(\log n)$

$\langle \quad \rangle \quad n \sin(2\pi n) = \Omega(\sqrt{n})$

$\langle \quad \rangle \quad \sum_{i=1}^n i^2 \sim n^3/3$

$\langle \quad \rangle \quad n! = O(e^n)$

0-2 Treffer:  
0 Punkte

3 Treffer:  
2 Punkte

4 Treffer:  
3 Punkte

5 Treffer:  
4 Punkte

**Aufgabe PK3.** Die *offspring* Verteilung eines Galton-Watson Prozesses sei  $(3/8)\delta_0 + (1/8)\delta_1 + (1/2)\delta_2$ , d.h. die Werte 0, 1, 2 werden mit Wahrscheinlichkeiten  $3/8$ ,  $1/8$ ,  $1/2$  angenommen. Berechnen Sie die mittlere Anzahl von Individuen in der dritten Generation sowie die Aussterbewahrscheinlichkeit des Prozesses.

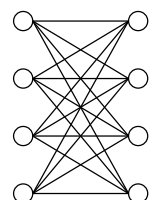
**Aufgabe PK4.** (a) Geben Sie zu den Strings

$$x_1 = (0, 2, 1, 2, \dots), \quad x_2 = (2, 1, 1, 0, \dots), \quad x_3 = (2, 1, 2, 0, \dots), \quad x_4 = (0, 2, 1, 1, \dots)$$

den zugehörigen Trie sowie PATRICIA-Trie an.

(b) Nehmen Sie an,  $n$  Strings bestehen aus allesamt unabhängigen Symbolen, die identisch gemäß der *offspring* Verteilung in Aufgabe 3 verteilt sind. Was gilt dann für die Tiefe der Knoten im Trie asymptotisch für  $n \rightarrow \infty$ ?  
(Sie brauchen keinen Dezimalwert anzugeben.)

**Aufgabe PK5.** Der vollständige bipartite Graph  $K_{n,n}$  mit  $2n$  Ecken hat die Eckenmenge  $V = \{1, \dots, 2n\}$  und Kanten zwischen Ecken  $i, j \in V$  mit  $1 \leq i \leq n < j \leq 2n$ . Die Abbildung zeigt  $K_{4,4}$ . Wir behalten alle Kanten jeweils unabhängig mit Wahrscheinlichkeit  $p$  bei, sonst werden sie gelöscht. Der resultierende Graph heiße  $K_{n,n,p}$ . Zeigen Sie, dass für  $p = p(n) = (2 \log n)/n$  asymptotisch fast sicher keine isolierten Ecken in  $K_{n,n,p}$  existieren.



**Aufgabe PK6.** Seien  $X_1, \dots, X_n$  unabhängige Zufallsvariable in das Einheitsquadrat  $[0, 1]^2$ . Zeigen Sie, dass für die Länge  $L_n = \text{tsp}(X_1, \dots, X_n)$  einer *traveling salesman tour* durch  $X_1, \dots, X_n$  gilt

$$\mathbb{P}(|L_n - \mathbb{E}[L_n]| \geq t) \leq 2 \exp\left(-\frac{t^2}{4n}\right), \quad t > 0.$$

**Aufgabe PK7.** Ein zufälliger Binärsuchbaum werde sukzessive aufgebaut. Nach Einfügen von 9 Knoten habe der Baum 4 Knoten mit genau einem Kind. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Baum nach Einfügen von 4 weiteren Knoten keinen Knoten mit genau einem Kind hat.

**Aufgabe PK8.** Ein Trie werde von  $n \geq 2$  unabhängigen Strings bestehend aus unabhängigen Bernoulli(1/2) verteilten Symbolen aufgebaut. Es bezeichne  $S_n$  die Anzahl der Knoten des Tries. Zeigen Sie, dass für alle  $c > 2$  gilt:

$$\mathbb{P}(S_n \geq cn \log_2 n) \leq n^{2-c}.$$

**Keine Abgabe.**