Optimierung und inverse Probleme
Wintersemester 2018/19
Prof. Dr. Bastian von Harrach
M. Sc. Tim Jahn

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

9. Übungsblatt (erschienen am 11.12.2018)

Aufgabe 9.1 (Votieraufgabe)
Beweisen Sie Lemma 2.62 aus der Vorlesung: Ist $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ zweimal stetig differenzierbar, so auch $\Phi(x) := \frac{1}{2}\|F(x)\|^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^m F_i(x)^2$ und es gilt:

(a) $\nabla\Phi(x) = F'(x)^\intercal F(x)$.

(b) $\nabla^2\Phi(x) = F'(x)^\intercal F'(x) + \sum_{i=1}^m F_i(x)\nabla^2 F_i(x)$.

Aufgabe 9.2 (schriftliche Aufgabe)[5 Punkte]
In dieser Aufgabe soll für ein $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ das folgende **globalisierte Quasi-Newton-Verfahren mit BFGS-Aufdatierung** betrachtet werden:

Algorithm 1 Globalisiertes BFGS-Verfahren

Gegeben: Startwert $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $0 < \gamma < 1$ und $\gamma < \eta < 1$
Gegeben: Symmetrische, positiv definite Startmatrix $B_0 \in \mathbb{R}^{n\times n}$
for $k = 0, 1, 2, \dots$ **do**
  if $\nabla f(x_k) = 0$ **then**
    STOP
  else
    $d_k := -B_k \nabla f(x_k)$
    Bestimme $s_k > 0$ mithilfe der Powell-Wolfe-Regel
    $x_{k+1} := x_k + s_k d_k$
  end if
  if $\nabla f(x_{k+1}) = 0$ **then**
    STOP
  else
    $\tilde{d}_k := x_{k+1} - x_k,\ y_k := \nabla f(x_{k+1}) - \nabla f(x_k)$
    $B_{k+1} := B_k + \frac{(\tilde{d}_k - B_k y_k)\tilde{d}_k^\intercal + \tilde{d}_k(\tilde{d}_k - B_k y_k)^\intercal}{\tilde{d}_k^\intercal y_k} - \frac{(\tilde{d}_k - B_k y_k)^\intercal y_k}{(\tilde{d}_k^\intercal y_k)^2}\tilde{d}_k\tilde{d}_k^\intercal$
  end if
end for
return $x_0, x_1, x_2, \dots$

Sei B_k positiv definit. Zeigen Sie das folgende eingeschränkte Konvergenzresultat:

(a) Sei die Bestimmung einer Powell-Wolfe-Schrittweite $s_k > 0$ erfolgreich. Dann gilt $y_k^\intercal \tilde{d}_k > 0$ und B_{k+1} ist positiv definit.
Hinweis: Blatt 8, Aufgabe 1.

(b) Sei f nach unten beschränkt. Dann ist Algorithmus 1 durchführbar. Sei außerdem $\kappa(B_k)$ die Konditionszahl der Matrix B_k gleichmäßig beschränkt, so ist das Verfahren global konvergent im Sinne von Satz 2.29.

Aufgabe 9.3 (Votieraufgabe)
In dieser Aufgabe soll eine Variante des **Levenberg-Marquardt-Verfahrens** (Algorithmus 10) behandelt werden, wobei der Trust-Region-Radius r explizit kontrolliert wird. Das resultierende Verfahren lautet:

Algorithm 2 Modifiziertes Levenberg-Marquardt-Verfahren

1: **Gegeben:** Startwert $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und $0 < \gamma < 1$

2: **for** $k = 0, 1, 2, \dots$ **do**

3:    **if** $F'(x_k)^\intercal F(x_k) = 0$ **then**

4:       STOP

5:    **end if**

6:    $r = 1$

7:    **repeat**

8:       Bestimme x_{k+1} als Minimierer von $\|F(x_k) + F'(x_k)(x - x_k)\| \to \min!$ u.d.N. $\|x - x_k\| \leq r$

9:       $\varepsilon := \frac{\|F(x_k)\|^2 - \|F(x_{k+1})\|^2}{\|F(x_k)\|^2 - \|F(x_k) + F'(x_k)(x_{k+1} - x_k)\|^2}$

10:       **if** $\varepsilon \leq \gamma$ **then**

11:          $r := r/2$

12:       **end if**

13:    **until** $\varepsilon > \gamma$

14: **end for**

15: **return** $x_0, x_1, x_2, \dots$

Erklären Sie die Unterschiede zu Algorithmus 10 der Vorlesung und formulieren Sie die Zeile 8 als Pseudocode.

Aufgabe 9.4 (Multiple Choice)
Kreuzen Sie an, für welche der folgenden Funktionen die Anwendung eines einzelnen Gauß-Newton-Schrittes für jeden Startwert einen globalen Minimierer von $\frac{1}{2}\|F(x)\|^2$ liefert.

$F_1\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ x \mapsto (x, x^2/4 + 1)^\intercal$	wahr ☐	falsch ☐
$F_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ x \mapsto (x, x/2, x + 1)^\intercal$	wahr ☐	falsch ☐
$F_3\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ x \mapsto (\sin(x), \cos(x))^\intercal$	wahr ☐	falsch ☐
$F_4\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ x \mapsto Ax + b,\ A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ b = (0, 1, 1)^\intercal$	wahr ☐	falsch ☐

Aufgabe 9.5 (Programmieraufgabe)[5 Punkte]
Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion

```
function [fz,z] = Globalisiertes_BFGS(f,grad_f,z0,B0,γ,η)
```

welche das Globalisierte BFGS-Verfahren aus Aufgabe 9.2 realisiert.

(a) Wenden Sie die Funktion auf das Minimalflächenproblem aus Aufgabe 1.5 bzw. Aufgabe 5.5 an. Verwenden Sie den Randwert $r(x, y) = \sin(xy\pi)$ sowie den Anfangswert $u(x, y) = \sin(xy\pi)$ $(x, y) \in (0, 1)^2$, $n = 50$ und $\varepsilon = 10^{-6}$. Dabei ist ε als Abbruchstoleranz für die Norm des Gradienten zu verstehen. Verwenden Sie die Startmatrizen $B_0 = \mathrm{Id}$, $B_0 = 10 \cdot \mathrm{Id}$ und $B_0 = 20 \cdot \mathrm{Id}$.

(b) Visualisieren Sie ihre Ergebnisse. Vergleichen Sie die Resultate mit denen aus Aufgabe 8.3. Was können Sie schlussfolgern?

Hinweise zur Übungsblattbearbeitung:

- Zu **schriftlichen Aufgaben** soll eine Ausarbeitung/Lösung angefertigt werden, welche am 18.12.2018 in Ihrer Übungsgruppe abzugeben ist.

- Zu **Programmieraufgaben** soll eine kommentierte Ausarbeitung in MATLAB-Code bis zum 18.12.2018 um 10:00 Uhr an **jahn@math.uni-frankfurt.de** geschickt werden. Bitte beginnen Sie die Betreffzeile Ihrer E-Mail mit **"Opt9_1819:"**.