

## 8. Übungsblatt (erschienen am 04.12.2018)

### Aufgabe 8.1 (Votieraufgabe)

Zu einem Quasi-Newton-Verfahren sei die **Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno-Aufdatierungsformel** (BFGS-Formel)

$$H_{k+1} := H_k + \frac{y_k y_k^\top}{y_k^\top d_k} - \frac{H_k d_k d_k^\top H_k^\top}{d_k^\top H_k d_k}$$

gegeben, wobei wieder  $y_k := \nabla f(x_{k+1}) - \nabla f(x_k)$  und  $d_k := x_{k+1} - x_k$  gilt und die Startmatrix  $H_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$  symmetrisch ist. Zeigen Sie:

- Mit den Bedingungen  $y_k^\top d_k \neq 0$  und  $d_k^\top H_k d_k \neq 0$  erfüllen die BFGS-Matrizen  $H_k$  die Quasi-Newton-Bedingung (2.18).
- Gilt  $y_k^\top d_k > 0$  und ist  $H_k$  positiv definit, so ist auch  $H_{k+1}$  positiv definit.
- Seien  $B_k := H_k^{-1}$  die Inversen der BFGS-Matrizen und sei wieder  $y_k^\top d_k > 0$  und ist  $H_k$  positiv definit. Rechnen Sie mittels Lemma 2.57 die Aufdatierungsformel

$$B_{k+1} := B_k + \frac{(d_k - B_k y_k) d_k^\top + d_k (d_k - B_k y_k)^\top}{d_k^\top y_k} - \frac{(d_k - B_k y_k)^\top y_k}{(d_k^\top y_k)^2} d_k d_k^\top$$

für die Inversen nach.

*Hinweis:* Die BFGS-Matrizen entstehen durch symmetrische Rang-2-Aufdatierungen der Form

$$H_{k+1} = H_k + \gamma_1 u_{k,1} u_{k,1}^\top + \gamma_2 u_{k,2} u_{k,2}^\top.$$

### Aufgabe 8.2 (Multiple Choice)

In dieser Aufgabe sei  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  eine zweimal stetig differenzierbare Funktion und  $H_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

- Ist  $H_k$  positiv definit, so ist  $d_k = -H_k^{-1} \nabla f(x_k)$  eine Abstiegsrichtung. wahr  falsch
- Gilt  $\|\nabla f(x_{k+1}) - \nabla f(x_k) - \nabla^2 f(x_k)(x_{k+1} - x_k)\| = o(\|x_{k+1} - x_k\|)$  so sind äquivalent:
  - $\|\nabla f(x_{k+1}) - \nabla f(x_k) - H_k(x_{k+1} - x_k)\| = o(\|x_{k+1} - x_k\|)$ .
  - $\|(\nabla^2 f(x_k) - H_k)(x_{k+1} - x_k)\| = o(\|x_{k+1} - x_k\|)$ . wahr  falsch

### Aufgabe 8.3 (schriftliche Aufgabe)[4 Punkte]

In der Vorlesung in Abschnitt 2.4.4 wurde folgende Methode zur Bestimmung der Matrizen  $H_k$  vorgestellt:

Beginnend mit einer symmetrischen Startmatrix  $H_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$  wähle die weiteren Matrizen durch *Aufdatierung als symmetrische Rang-1-Modifikation*

$$H_{k+1} = H_k + \gamma_k u_k u_k^\top,$$

wobei  $\gamma_k \in \mathbb{R}$  und  $u_k \in \mathbb{R}^n$  so zu bestimmen sind, dass  $H_{k+1}$  die Quasi-Newton-Bedingung (2.18) erfüllt. Sei außerdem  $y_k := \nabla f(x_{k+1}) - \nabla f(x_k)$  und  $d_k := x_{k+1} - x_k$ . Zeigen Sie: Mit der Bedingung  $(y_k - H_k d_k)^\top d_k \neq 0$  ergibt sich in **eindeutiger** Weise die **Symmetrisch-Rang-1-Aufdatierungsformel** (SR1)

$$H_{k+1} = H_k + \frac{(y_k - H_k d_k)(y_k - H_k d_k)^\top}{(y_k - H_k d_k)^\top d_k}.$$

### Aufgabe 8.4 (Programmieraufgabe zum Votieren)

Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion

```
function[fz,z] = Quasi_Newton_BFGS(f,grad_f,z0,B0)
```

welche das Quasi-Newton-Verfahren mit BFGS-Aufdatierung (vgl. Algorithmus 7 der Vorlesung) realisiert.

- (a) Wenden Sie die Funktion auf das Minimalflächenproblem aus Aufgabe 1.5 bzw. Aufgabe 5.5 an. Verwenden Sie den Randwert  $r(x, y) = \sin(xy\pi)$  sowie den Anfangswert  $u(x, y) = \sin(xy\pi)$   $(x, y) \in (0, 1)^2$ ,  $n = 20$  und  $\varepsilon = 10^{-10}$ . Dabei ist  $\varepsilon$  als Abbruchtoleranz für die Norm des Gradienten zu verstehen. Verwenden Sie als Startmatrix einerseits die Identität  $B_0 = \text{Id}$  und andererseits die skalierte Identität  $B_0 = \frac{1}{n}\text{Id}$ . Können Sie dieselben Tests auch für  $n = 50$  durchführen?
- (b) Visualisieren Sie ihre Ergebnisse. Vergleichen Sie die Resultate mit denen aus Aufgabe 5.5. Was können Sie schlussfolgern?

## Hinweise zur Übungsblattbearbeitung:

- Zu **schriftlichen Aufgaben** soll eine Ausarbeitung/Lösung angefertigt werden, welche am 11.12.2018 in Ihrer Übungsgruppe abzugeben ist.
- Zu **Programmieraufgaben** soll eine kommentierte Ausarbeitung in MATLAB-Code bis zum 11.12.2018 um 10:00 Uhr an [jahn@math.uni-frankfurt.de](mailto:jahn@math.uni-frankfurt.de) geschickt werden. Bitte beginnen Sie die Betreffzeile Ihrer E-Mail mit "**Opt8\_1819:**".