Optimierung und inverse Probleme
Wintersemester 2018/19
Prof. Dr. Bastian von Harrach
M. Sc. Tim Jahn

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

5. Übungsblatt (erschienen am 13.11.2018)

Aufgabe 5.1 (Votieraufgabe)

Sei $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sei eine durch das allgemeine Abstiegsverfahren erzeugte Folge und es gilt $f(x_{k+1}) < f(x_k)$. Zeigen Sie:

(a) Sind $\bar{x}$ und $\hat{x}$ zwei Häufungspunkte der Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, dann gilt $f(\bar{x}) = f(\hat{x})$.

(b) Ist $\bar{x}$ ein Häufungspunkt der Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, so ist $f(\bar{x})$ kein striktes lokales Maximum. Gilt diese Aussage auch in dem Fall, dass das Verfahren nach endlich vielen Schritten abbricht?

Aufgabe 5.2 (Votieraufgabe)

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die Suchrichtungen des allgemeinen Abstiegsverfahrens zulässig sind, wenn sie die Winkelbedingung erfüllen. Zeigen Sie, dass die Suchrichtungen bereits zulässig sind, wenn sie eine der verallgemeinerten Winkelbedingungen erfüllen:

(a) $\exists\ \alpha > 0,\ p > -1 : \frac{-\nabla f(x_k)^\intercal d_k}{\|\nabla f(x_k)\|\,\|d_k\|} \geq \alpha \|\nabla f(x_k)\|^p$

(b) $\exists\ \alpha_1, \alpha_2 > 0,\ p > -1 : \frac{-\nabla f(x_k)^\intercal d_k}{\|\nabla f(x_k)\|\,\|d_k\|} \geq \min\{\alpha_1, \alpha_2 \|\nabla f(x_k)\|^p\}$

Aufgabe 5.3 (Multiple Choice)[2.5 Punkte]

In dieser Aufgabe sei $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Weiterhin betrachten wir das allgemeine Abstiegsverfahren (Algorithmus 3 der Vorlesung).

(a) Die Suchrichtungen $d_k = -2^{-k}\nabla f(x_k)$ sind zulässig. wahr ☐ falsch ☐

(b) Sei $\phi : [0,\infty) \to [0,\infty)$, mit $\phi(x) = 0$ genau dann, wenn $x = 0$, monoton wachsend. Dann sind die $(d_k)_{k\in\mathbb{N}}$ zulässig, falls $-\nabla f(x_k)^\intercal d_k \geq \phi(\|\nabla f(x_k)\|)\|d_k\|,\ \forall\ k \in \mathbb{N}$. wahr ☐ falsch ☐

(c) Die $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sind zulässig, falls $f(x_k + s_k d_k) < f(x_k),\ \forall\ k \in \mathbb{N}$ gilt, $(d_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Abstiegsrichtungen sind und es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta(\varepsilon) > 0$ gibt, so dass für jede konvergente Teilfolge $(x_l)_{l\in L}$ der Iterierten gilt: $\frac{-\nabla f(x_l)^\intercal d_l}{\|d_l\|} \geq \varepsilon \implies f(x_l) - f(x_l + s_l d_l) \geq \delta(\varepsilon),\ \forall\ l \in L$. wahr ☐ falsch ☐

Aufgabe 5.4 (Schriftliche Aufgabe)[4 Punkte]

Seien $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, $\beta, \gamma \in (0,1)$ gegeben und sei d_k immer eine Abstiegsrichtung. Bei der **Armijo-Schrittweitenregel mit Aufweitung** wird eine Schrittweite $s_k \in \{\dots, \beta^3, \beta^2, \beta, 1, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\beta^2}, \frac{1}{\beta^3}, \dots\}$ gesucht, welche die beiden Bedingungen

$$f(x_k + s_k d_k) \leq f(x_k) + \gamma s_k \nabla f(x_k)^\intercal d_k \tag{1}$$

$$f\left(x_k + \frac{s_k}{\beta} d_k\right) > f(x_k) + \gamma \frac{s_k}{\beta} \nabla f(x_k)^\intercal d_k \tag{2}$$

erfüllt. Zeigen Sie: Ist die Niveaumenge $N_f(x_k) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \le f(x_k)\}$ beschränkt, so terminiert Algorithmus 1 nach endlich vielen Schritten mit einer Schrittweite, welche (1) und (2) erfüllt.

Algorithm 1 Armijo-Schrittweitenregel mit Aufweitung

Gegeben: Armijo-Parameter $\beta \in (0,1)$ und $\gamma \in (0,1)$
Gegeben: aktuelle Iterierte x_k, Abstiegsrichtung d_k
$s_k := 1/\beta$
repeat
  $s_k := \beta s_k$
  $x_{k+1} := x_k + s_k d_k$
until $f(x_{k+1}) \le f(x_k) + \gamma s_k \nabla f(x_k)^\intercal d_k$
repeat
  $s_k := \frac{s_k}{\beta}$
  $x_{k+1} := x_k + s_k d_k$
until $f(x_{k+1}) > f(x_k) + \gamma s_k \nabla f(x_k)^\intercal d_k$
$s_k := \beta s_k$
$x_{k+1} := x_k + s_k d_k$
return x_{k+1}

Aufgabe 5.5 (Programmieraufgabe zum Votieren)
Wir betrachten wieder das Minimalflächenproblem aus Kapitel 1.3.1 der Vorlesung. Dabei übernehmen wir die Diskretisierung und Notation aus Aufgabe 1.5. Wir geben nun Randwerte $r\colon \partial\Omega \to \mathbb{R}$ vor und führen $L \subset N$ die Indexmenge der Randknoten ein, sodass $U_i = r(x_i)$, $i \in L$ gefordert wird. In dieser Aufgabe soll das eigentliche Optimierungsproblem

$$A(U) \to min! \quad \text{u.d.N. } U \in \mathbb{R}^N,\, U_i = r(x_i),\, i \in L \tag{3}$$

gelöst werden. Verwenden Sie dazu die MATLAB-Funktion aus Aufgabe 1.5 um zu gegebenem $U \in \mathbb{R}^N$ den Flächeninhalt $A(U)$ zu berechnen. Weiter seien die Randwerte $r_1(x,y) = 1$ und $r_2(x,y) = \sin(xy\pi)$ gegeben.

(a) Verwenden Sie den Algorithmus aus Aufgabe 2.6 um (3) zu lösen. Testen Sie das Verfahren mit dem Randwert r_1, dem Anfangswert $u_1(x,y) = 0, (x,y) \in (0,1)^2$, $n = 5$, $h = 1$, $\varepsilon = 10^{-6}$ sowie mit dem Randwert r_2, dem Anfangswert $u_2(x,y) = \sin(xy\pi), (x,y) \in (0,1)^2$, $n = 20$, $h = 1$, $\varepsilon = 10^{-3}$.

(b) Bestimmen Sie den Gradienten von A.
Hinweis: Durch die Randwerte sind die Randknoten keine Freiheitsgrade mehr. Der Gradient muss nur in den inneren Knoten berechnet werden.

(c) Verwenden Sie das Gradientenverfahren mit Armijo-Schrittweitenregel aus Aufgabe 3.5 um (3) zu lösen. Testen Sie das Verfahren mit dem Randwert r_1, dem Anfangswert $u_1(x,y) = 0, (x,y) \in (0,1)^2$, $n = 5$ und $\varepsilon = 10^{-6}$ sowie mit dem Randwert r_2, dem Anfangswert $u_2(x,y) = \sin(xy\pi)$, $(x,y) \in (0,1)^2$, $n = 20$ und $\varepsilon = 10^{-3}$. Verwenden Sie stets $\beta = 0.5$ und $\gamma = 0.01$. ε ist hier als Abbruchstoleranz für die Norm des Gradienten zu verstehen.

(d) Visualisieren Sie ihre Ergebnisse. Was können Sie über die Geschwindigkeit der Verfahren sagen?

Hinweise zur Übungsblattbearbeitung:

- Zu **schriftlichen Aufgaben** soll eine Ausarbeitung/Lösung angefertigt werden, welche am 20.11.2018 in Ihrer Übungsgruppe abzugeben ist.

- Zu **Programmieraufgaben** soll eine kommentierte Ausarbeitung in MATLAB-Code bis zum 20.11.2018 um 10:00 Uhr an **jahn@math.uni-frankfurt.de** geschickt werden. Bitte beginnen Sie die Betreffzeile Ihrer E-Mail mit **"Opt5_1819:"**.