Optimierung und inverse Probleme
Wintersemester 2018/19
Prof. Dr. Bastian von Harrach
M. Sc. Tim Jahn

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

3. Übungsblatt (erschienen am 30.10.2018)

Aufgabe 3.1 (Votieraufgabe)
Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und $x \in \mathbb{R}^n$ beliebig mit $\nabla f(x) \neq 0$.

(a) Zeigen Sie: $\bar{d} = -\frac{\nabla f(x)}{\|\nabla f(x)\|}$ ist die eindeutige Lösung des Problems

$$\min_{\|d\| \leq 1} \nabla f(x)^\intercal d,\ d \in \mathbb{R}^n.$$

(b) Sei nun $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische positiv definite Matrix. Diese definiert auf dem $\mathbb{R}^n$ durch $\|s\|_A := \sqrt{s^\intercal A s}$ die **A-Norm**. Bestimmen Sie die Lösung des Problems

$$\min_{\|d\|_A \leq 1} \nabla f(x)^\intercal d,\ d \in \mathbb{R}^n.$$

Aufgabe 3.2 (Votieraufgabe)
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion.

(a) Zeigen Sie: Wenn x^* ein lokales aber kein globales Minimum von f ist, dann besitzt f neben x^* einen weiteren stationären Punkt.

(b) Gilt die Aussage aus Aufgabenteil **(a)** auch im Mehrdimensionalen? Betrachten Sie dazu die Funktion $f(x, y) = e^{3y} - 3xe^y + x^3$.

Aufgabe 3.3 (schriftliche Aufgabe)[6 Punkte]
Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion mit global Lipschitz-stetiger Ableitung, d.h. es existiere ein $L > 0$, sodass gilt:

$$\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\| \leq L\|x - y\|,\ \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Wir betrachten nun ein modifiziertes Gradientenverfahren analog zu Algorithmus 2. Dabei wird jedoch die Schrittweite s_k nicht über die Armijo-Regel bestimmt, sondern stattdessen $s_k = \alpha_k$ gewählt mit

$$\varepsilon \leq \alpha_k \leq \frac{1 - \varepsilon}{L}.$$

Dabei ist $0 < \varepsilon < \frac{1}{1+L}$ eine über den gesamten Algorithmus feste Konstante.

(a) Zeigen Sie, dass, falls der Algorithmus im k-ten Schritt noch nicht terminiert hat (also $\nabla f(x_i) \neq 0$ für alle $i \leq k$) gilt:

$$f(x_{k+1}) < f(x_k).$$

(b) Beweisen Sie, dass der so modifizierte Algorithmus entweder nach endlich vielen Schritten an einem stationären Punkt x_k terminiert oder eine unendliche Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ erzeugt, deren Häufungspunkte stationäre Punkte sind.

Aufgabe 3.4 (Multiple Choice)[1.5 Punkte]
In dieser Aufgabe sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stets eine stetig differenzierbare Funktion.

(a) Jede Abstiegsrichtung d_k im Punkt x_k erfüllt $d_k = -\lambda\nabla f(x_k)$ mit einem $\lambda > 0$.
wahr ☐ falsch ☐

(b) Das Gradientenverfahren mit Armijo-Regel terminiert endlich oder erzeugt eine Folge, die mindestens einen Häufungspunkt besitzt. wahr ☐ falsch ☐

(c) Es sei $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ein Punkt mit $\nabla f(x_0) \neq 0$. Weil der negative Gradient eine Abstiegsrichtung ist, gilt für $x_1 := x_0 - \nabla f(x_0)$: $f(x_1) < f(x_0)$. wahr ☐ falsch ☐

Aufgabe 3.5 (Programmieraufgabe)[5 Punkte]
Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion

```
function [z,fz] = Gradient_mit_Armijo(f,∇f,z0,β,γ)
```

welche das Gradientenverfahen mit der Armijo-Schrittweitenregel aus der Vorlesung realisiert (vgl. Algorithmus 2).

(a) Wenden Sie ihre Funktion auf $f(x,y) = x^2 + y^2 + (\sin(x) + \cos(x))^2$ an. Benutzen Sie $z_0 = [5,5]$, $\beta = 0.5$ und $\gamma = 0.01$.
Hinweis: Verwenden Sie für ihr Abbruchskriterium eine geeignete Toleranz.

(b) Untersuchen Sie numerisch die Konvergenzgeschwindigkeit des Verfahrens.

Hinweise zur Übungsblattbearbeitung:

- Zu **schriftlichen Aufgaben** soll eine Ausarbeitung/Lösung angefertigt werden, welche am 06.11.2018 in Ihrer Übungsgruppe abzugeben ist.

- Zu **Programmieraufgaben** soll eine kommentierte Ausarbeitung in MATLAB-Code bis zum 06.11.2018 um 10:00 Uhr an **jahn@math.uni-frankfurt.de** geschickt werden. Bitte beginnen Sie die Betreffzeile Ihrer E-Mail mit **"Opt3_1819:"**.