Optimierung und inverse Probleme
Wintersemester 2018/19
Prof. Dr. Bastian von Harrach
M. Sc. Tim Jahn

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

2. Übungsblatt (erschienen am 23.10.2018)

Aufgabe 2.1 (Votieraufgabe)
Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x^2 - 5xy^2 + 5y^4$.

(a) Bestimmen Sie alle stationären Punkte von f.

(b) Zeigen Sie, dass $\bar{x} = 0$ bzw. $\bar{y} = 0$ striktes globales Minimum von $x \mapsto f(x, 0)$ bzw. $y \mapsto f(0, y)$ ist.

(c) Zeigen Sie, dass $(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 0)$ kein lokales Minimum von f ist.

Aufgabe 2.2 (schriftliche Aufgabe)[5 Punkte]
Gegeben seien eine konvexe (aber nicht notwendigerweise differenzierbare) Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und zwei Punkte x^*, $z \in \mathbb{R}^n$.

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion $\psi : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ gegeben durch $\psi(t) = \frac{1}{t}(f(x^* + tz) - f(x^*))$ monoton wachsend ist.

(b) Beweisen Sie die Existenz der einseitigen Richtungsableitung

$$\partial f(x^*)z := \lim_{\substack{t \to 0 \\ t>0}} \psi(t) = \inf_{t>0} \psi(t).$$

(c) Zeigen Sie: f besitzt ein globales Minimum im Punkt $x^* \iff \partial f(x^*)(x - x^*) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

Aufgabe 2.3 (Multiple Choice)

(a) $x^* \in \mathbb{R}^n$ ist genau dann stationärer Punkt von f, wenn $\nabla f(x^*)^T h \leq 0$ $\forall h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt. wahr ☐ falsch ☐

(b) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^4$ ist gleichmäßig konvex. wahr ☐ falsch ☐

(c) Ist $f : I \to \mathbb{R}$ konvex, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, so ist $g : I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto (f(x))^2$ strikt konvex. wahr ☐ falsch ☐

(d) Jede strikt konvexe Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ besitzt ein globales Minimum. wahr ☐ falsch ☐

Aufgabe 2.4 (Votieraufgabe)
Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ eine konvexe Menge und $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Seien $g : X \to \mathbb{R}$, mit $g(X) \subset I$, und $f : I \to \mathbb{R}$ konvexe Funktionen und f sei monoton wachsend.

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion $f \circ g : x \in X \mapsto f(g(x)) \in \mathbb{R}$ konvex ist.

(b) Geben Sie ein Beispiel an, das zeigt, dass auf das monotone Wachstum von f im Allgemeinen nicht verzichtet werden kann.

Aufgabe 2.5 (Programmieraufgabe)[4 Punkte]

Folgender Algorithmus dient der Berechnung von lokalen Minima einer Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$:

Gegeben seien ein Ausgangspunkt z_0, eine Schrittweite h, eine Toleranz ε und Suchrichtungen

$$s_i = \pm e_i, \qquad i = 1, ..., n,$$

wobei e_i den i-ten Einheitsvektor bezeichnet. Gehe immer vom aktuellen Ausgangspunkt einen Schritt mit Schrittweite h in jede Suchrichtung und bestimme den dortigen Funktionswert. Ebenso berechne den Funktionswert am aktuellen Ausgangspunkt. Stimmt der kleinste dieser $2n + 1$ Funktionswerte mit dem Wert am Ausgangspunkt überein, so halbiere die Schrittweite und fahre fort. Andernfalls wähle das Argument des kleinsten Funktionswertes als neuen Ausgangspunkt und fahre mit der alten Schrittweite fort. Wiederhole den Vorgang, bis die Schrittweite kleiner als die Toleranz ε ist.

Implementieren Sie den Algorithmus in einer MATLAB-Funktion

```
function [z,fz] = Minimum(f, z0, h, ε).
```

Testen Sie ihre Funktion, indem Sie die Koordinaten $(z, f(z))$ der lokalen Minima folgender Funktionen bestimmen:

(a) $f_1(x, y) = \frac{1}{6}x^2 + y^2 + \frac{1}{4}x + 1$. Verwenden Sie $z_0 = (-10, 10)$, $h = 1$ und $\varepsilon = 0.01$.

(b) $f_2(x, y) = \frac{1}{4}(x^4y^2+x^4)-x^3y^2-x^3+xy^2+x+5y^2+5$. Verwenden Sie $z_{0,1} = (0, 5)$ und $z_{0,2} = (0.5, 5)$, $h = 1$ und $\varepsilon = 0.01$.

Hinweise zur Übungsblattbearbeitung:

- Zu **schriftlichen Aufgaben** soll eine Ausarbeitung/Lösung angefertigt werden, welche am 30.10.2018 in Ihrer Übungsgruppe abzugeben ist.

- Zu **Programmieraufgaben** soll eine kommentierte Ausarbeitung in MATLAB-Code bis zum 30.10.2018 um 10:00 Uhr an **jahn@math.uni-frankfurt.de** geschickt werden. Bitte beginnen Sie die Betreffzeile Ihrer E-Mail mit **"Opt2_1819:"**.