13. Übungsblatt (erschienen am 29.01.2019)

Aufgabe 13.1 (schriftliche Aufgabe)[4 Punkte]
Zeigen Sie, dass es sich bei der folgenden Forderung um eine Constraint Qualification handelt:

$$g_i \text{ ist konkav für alle } i \notin I_x,\ \ h \text{ ist affin linear.}$$

Dabei nennen wir eine Funktion $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ affin linear, wenn Sie sich schreiben lässt als $h(x) = Ax + b$, mit $A \in \mathbb{R}^{p\times n},\ b \in \mathbb{R}^p$ und eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konkav, falls $f((1-\lambda)x + \lambda y) \geq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}^n,\ \lambda \in [0,1]$ gilt.
Hinweis: Verwenden Sie Satz 2.16.

Aufgabe 13.2 (Votieraufgabe)
Seien $A \in \mathbb{R}^{n\times m},\ B \in \mathbb{R}^{n\times p},\ c \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Zeigen Sie, dass dann folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) Für alle $d \in \mathbb{R}^n$ mit $A^\intercal d \leq 0$ und $B^\intercal d = 0$ gilt $c^\intercal d \leq 0$.

(ii) Es gibt $u \in \mathbb{R}^m$ mit $u \geq 0$ und $v \in \mathbb{R}^p$ mit $c = Au + Bv$.

Aufgabe 13.3 (Votieraufgabe)
Seien $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ zweimal stetig differenzierbar. Zu einem $x \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in [0,\infty)^m$ definieren wir folgenden Kegel:

$$T_+(g,h,x,\lambda) = \left\{ d \in \mathbb{R}^n \mid \nabla g_i(x)^\intercal d \begin{cases} = 0, & \text{falls } i \notin I_x \text{ und } \lambda_i > 0 \\ \leq 0, & \text{falls } i \notin I_x \text{ und } \lambda_i = 0 \end{cases}, \nabla h(x)^\intercal d = 0 \right\}.$$

Beweisen Sie die verschärfte Version von Satz 3.41: erfüllt $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ die KKT-Bedingungen mit Lagrange-Multiplikatoren $\hat{\lambda} \in \mathbb{R}^m$ und $\hat{\mu} \in \mathbb{R}^p$ und gilt

$$d^\intercal \nabla^2_{xx} L(\hat{x},\hat{\lambda},\hat{\mu}) d > 0 \quad \text{für alle } 0 \neq d \in T_+(g,h,\hat{x},\hat{\lambda}),$$

dann ist $\hat{x}$ eine isolierte lokale Lösung von

$$f(x) \to \min! \quad \text{u.d.N. } g(x) \leq 0,\ h(x) = 0.$$

Aufgabe 13.4 (Programmieraufgabe)[6 Punkte]
Penalty-Verfahren sind klassische Verfahren um restringierte Minimierungsprobleme zu lösen. Dabei wird das Problem

$$f \to \min! \quad \text{u.d.N.} \quad g(x) \leq 0$$

ersetzt durch das unrestringierte Problem

$$f_\alpha(x) := f(x) + \frac{\alpha}{2} \sum_{i=1}^m \max\{g_i(x), 0\}^2 \to \min!, \tag{1}$$

welches typischerweise iterativ gelöst wird: für $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und $\alpha_0, \beta, \varepsilon > 0$ wird x_k als Lösung von (1), mit Startwert x_{k-1} und Strafparameter $\alpha_k = \beta\alpha_{k-1}$ bestimmt, bis $\sum_{i\leq m} \max\{0, g_i(x_k)\}^2 \leq \varepsilon^2$. Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion

```
function [z,fz] = Penalty(fa,gradfa,x0,alpha0,beta,epsilon),
```

welche obiges Verfahren implementiert (wobei (1) mit dem Gradienten-Verfahren mit Armijoregel zu lösen ist) auf und testen Sie Ihre Funktion für $\alpha_0 = 1/10$, $\beta = 10$ und $\varepsilon = 10^{-3}$, mit

$$f(x, y, z) = 1000 - x^2 - 2y^2 - z^2 - xy - xz$$

$$g(x, y, z) = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 + z^2 - 25 \\ 8x + 14y + 7z - 56 \end{pmatrix}$$

und Startwert $x_0 = \big(3, 0.2, 3\big)^T$.

Hinweise zur Übungsblattbearbeitung:

- Zu **schriftlichen Aufgaben** soll eine Ausarbeitung/Lösung angefertigt werden, welche am 05.02.2019 in Ihrer Übungsgruppe abzugeben ist.

- Zu **Programmieraufgaben** soll eine kommentierte Ausarbeitung in MATLAB-Code bis zum 05.02.2019 um 10:00 Uhr an **jahn@math.uni-frankfurt.de** geschickt werden. Bitte beginnen Sie die Betreffzeile Ihrer E-Mail mit **"Opt13_1819:"**.