Optimierung und inverse Probleme
Wintersemester 2018/19
Prof. Dr. Bastian von Harrach
M. Sc. Tim Jahn

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

12. Übungsblatt (erschienen am 22.01.2019)

Aufgabe 12.1 (Votieraufgabe)
Beweisen Sie: Sei die Menge $\emptyset \neq X \subset \mathbb{R}^n$ und $x \in X$ ein Häufungspunkt von X, dann ist $T(X,x) \neq \emptyset$.

Aufgabe 12.2 (schriftliche Aufgabe)[4 Punkte]
Zeigen Sie die Aussage von Beispiel 3.26 der Vorlesung: Die Menge

$$X = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \; -1 \leq x_1 \leq 1,\; x_2 = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \; (x_1+1)^3 \geq x_2,\; x_1 \leq 1,\; x_2 = 0\}$$

lässt sich beschreiben durch

$$g(x) = \begin{pmatrix} -x_1 - 1 \\ x_1 - 1 \end{pmatrix}, \quad h(x) = x_2$$

aber auch durch

$$\tilde{g}(x) = \begin{pmatrix} x_2 - (x_1+1)^3 \\ x_1 - 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{h}(x) = x_2.$$

Zeigen Sie, dass für $\bar{x} = (-1,0)^\intercal \in X$ gilt

$$T(X,\bar{x}) = T_l(g,h,\bar{x}) \subsetneq T_l(\tilde{g},\tilde{h},\bar{x}),$$

und stellen Sie den Sachverhalt grafisch dar.

Aufgabe 12.3 (Votieraufgabe)
Seien zweimal stetig differenzierbaren Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\; h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ und der Lagrange-Multiplikator $\mu \in \mathbb{R}^p$ gegeben. Dann ist

$$L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R},\; L(x,\mu) := f(x) + \mu^\intercal h(x)$$

die zugehörige Lagrange-Funktion. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$F(x,\mu) := \begin{pmatrix} \nabla_x L(x,\mu) \\ h(x) \end{pmatrix}$$

stetig differenzierbar ist mit

$$F'(x,\mu) = \begin{pmatrix} \nabla^2_{xx} L(x,\mu) & \nabla h(x) \\ \nabla h(x)^\intercal & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 12.4 (Programmieraufgabe)[6 Punkte]
In der Vorlesung wurde gezeigt, dass ein Minimierer $\hat{x}$ von $f(x) \to \min!$ mit Gleichungsnebenbedingungen $h(x) = 0$ die KKT-Bedingungen erfüllt (falls $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ stetig differenzierbar sind sowie eine (CQ) gilt):

$$\exists \hat{\mu} \in \mathbb{R}^p : \quad \nabla f(\hat{x}) + \nabla h(\hat{x})\hat{\mu} = 0 \quad \text{und} \quad h(\hat{x}) = 0.$$

Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion

```
function [fz,z,μ] = Lagrange_Newton(f,h,grad_h,grad_L,Hess_L,z0,μ0),
```

welche die KKT-Bedingungen numerisch mit dem Newton-Verfahren löst und testen Sie Ihre Funktion für $f(x, y) = 2(x^2 + y^2 - 1) - x$ und $h(x, y) = x^2 + y^2 - 1$.
Hinweis: Nutzen Sie Aufgabe 12.3.

Hinweise zur Übungsblattbearbeitung:

- Zu **schriftlichen Aufgaben** soll eine Ausarbeitung/Lösung angefertigt werden, welche am 29.01.2019 in Ihrer Übungsgruppe abzugeben ist.

- Zu **Programmieraufgaben** soll eine kommentierte Ausarbeitung in MATLAB-Code bis zum 29.01.2019 um 10:00 Uhr an **jahn@math.uni-frankfurt.de** geschickt werden. Bitte beginnen Sie die Betreffzeile Ihrer E-Mail mit **"Opt12_1819:"**.