GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

11. Übungsblatt (erschienen am 14.01.2019)

Aufgabe 11.1 (Schriftliche Aufgabe)[5 Punkte]
Zu einem linearen Problem mit Nebenbedingungen $Ax = b \geq 0$ und $x \geq 0$ betrachte das Ersatzproblem

$$\text{Minimiere} \qquad \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{pmatrix} A & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = b \qquad \text{und} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \geq 0,$$

wobei $y \in \mathbb{R}^m$ und $I \in \mathbb{R}^{m \times m}$ die Einheitsmatrix ist. Zeigen Sie:

(a) Für das Ersatzproblem is $\begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$ ein Basisvektor.

(b) Ist der zulässige Bereich des ursprünglichen Problems nicht leer, so hat jede optimale Ecke des Ersatzproblems die Form $\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$, wobei x eine Ecke des ursprünglichen Problems ist.

(c) Ist der zulässige Bereich des ursprünglichen Problems leer, so existiert keine optimale Ecke des Ersatzproblems oder diese besitzt nicht die Form $\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 11.2 (Votieraufgabe)
Die Auszahlungsmatrix eines Spieles sei gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, ohne die optimalen Strategien der Spieler zu bestimmen, dass das Spiel unfair ist, d.h. dass Folgendes gilt

$$\min_{\substack{x \geq 0, \\ e^\top x = 1}} \max_{\substack{y \geq 0, \\ e^\top y = 1}} y^\top A x \neq 0,$$

mit $e = (1, 1, 1)^\top$.
Hinweis: Zeigen Sie $\max_{i=1,2,3}(Ax)_i \geq \frac{1}{3} e^\top Ax$, schätzen Sie dann geschickt ab und unterscheiden Sie anschließend die Fälle $x_2 \in [0, 1-\varepsilon]$ und $x_2 \in [1-\varepsilon, 1]$ mit geeignetem $\varepsilon \in (0, 1)$.

Aufgabe 11.3 (Multiple Choice)
Gegeben Sei $K = \{x \in \mathbb{R}^7 \mid Ax = b,\ x \geq 0\}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 7}, \qquad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4.$$

Kreuzen Sie an, bei welchem der folgenden Vektoren es sich um einen Basisvektor von K handelt.

$x_1 = (2, 1, 3, -2, 0, 0, 0)^\intercal$	wahr ☐	falsch ☐
$x_2 = (1, 0, 3, 0, 1, 0, 0)^\intercal$	wahr ☐	falsch ☐
$x_3 = (1, 0, 3, 0, 3, 1, 0)^\intercal$	wahr ☐	falsch ☐
$x_4 = (0, 0, 2, 2, 1, 0, 3)^\intercal$	wahr ☐	falsch ☐
$x_5 = (2, 1, 1, 0, 2, 0, 2)^\intercal$	wahr ☐	falsch ☐

Aufgabe 11.4 (Programmieraufgabe)[6 Punkte]
Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $X := [l_1, u_1] \times \cdots \times [l_n, u_n]$, mit unteren Schranken $l_i \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ und oberen Schranken $u_i \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, mit $l_i < u_i$, $i = 1, \ldots, n$. Wir betrachten das zugehörige Optimierungsproblem

$$\min_{x \in X} f(x).$$

Die Projektion auf X ist bei unserer Wahl von X gegeben durch $(\mathrm{Proj}_X[x])_i = \begin{cases} l_i, \text{ falls } x_i < l_i, \\ x_i, \text{ falls } x_i \in [l_i, u_i], \\ u_i, \text{ falls } x_i > u_i. \end{cases}$

Damit lässt sich das *Projizierte Gradientenverfahren* formulieren:

Algorithm 1 Projiziertes Gradientenverfahren

Gegeben: Startwert $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und Armijo-Parameter $\beta \in (0, 1)$ und $\gamma \in (0, 1)$
for $k = 0, 1, 2, \ldots$ **do**
  if $\|x_k - \mathrm{Proj}_X[x_k - \nabla f(x_k)]\| = 0$ **then**
    STOP
  else
    $s_k := \frac{1}{\beta}$
    repeat
      $s_k := \beta s_k$
      $x_{k+1} := \mathrm{Proj}_X[x_k - s_k \nabla f(x_k)]$
    until $f(x_{k+1}) \leq f(x_k) - \gamma \nabla f(x_k)^\intercal (x_k - x_{k+1})$
  end if
end for
return $x_0, x_1, x_2, \ldots$

Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion

`function [fz,z] = Proj_Grad(f,grad_f,z0,`β`,`γ`)`

welche Algorithmus 1 realisiert und testen Sie die Funktion am Beispiel $f(x, y) = x^2 + 100y^2$, $X = [-2, -1] \times [-2, 2]$, sowie $z_0 = (10, 1)$, $\beta = 0.5$ und $\gamma = 0.01$. Visualisieren Sie ihre Ergebnisse.

Hinweise zur Übungsblattbearbeitung:

- Zu **schriftlichen Aufgaben** soll eine Ausarbeitung/Lösung angefertigt werden, welche am 21.01.2019 in Ihrer Übungsgruppe abzugeben ist.

- Zu **Programmieraufgaben** soll eine kommentierte Ausarbeitung in MATLAB-Code bis zum 21.01.2019 um 10:00 Uhr an **jahn@math.uni-frankfurt.de** geschickt werden. Bitte beginnen Sie die Betreffzeile Ihrer E-Mail mit **"Opt11_1819:"**.