Optimierung und inverse Probleme
Wintersemester 2018/19
Prof. Dr. Bastian von Harrach
M. Sc. Tim Jahn

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

10. Übungsblatt (erschienen am 18.12.2018)

Aufgabe 10.1 (Rettet Weihnachten!)

Sei die Abbildung g und die Matrix M gegeben durch

$$g : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} : (x, \lambda) \mapsto \lambda,\ \forall x \in \mathbb{R}^3,\ \lambda \in \mathbb{R}, \qquad M = \begin{pmatrix} 0.1 & 1 & 1 \\ 1 & 0.2 & 0.9 \\ 1 & 0.9 & 0.4 \end{pmatrix}.$$

Betrachten Sie die Optimierungsaufgabe, das Maximum von g unter den Nebenbedingungen

$$\lambda \geq 0,\ x \geq 0,\ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}^\intercal x = 1 \text{ und } \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \leq Mx$$

zu bestimmen.

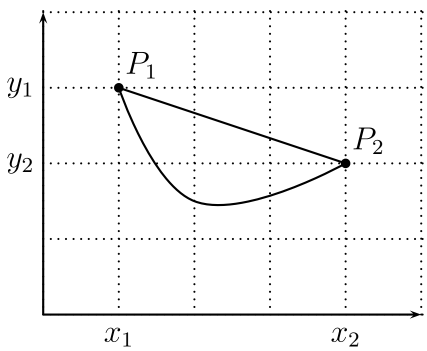
(a) Schreiben Sie das Problem in eine lineare Optimierungsaufgabe in Normalform um.

(b) Bestimmen Sie durch Raten eine zulässige Ecke.

(c) Implementieren Sie das Simplex-Verfahren aus Algorithmus 11 der Vorlesung und lösen Sie obiges Optimierungsproblem.

Aufgabe 10.2 (Modellierung)

Es soll das Problem der **Brachistochrone** betrachtet werden. Bei diesem von Johann Bernoulli gestellten Problem ist eine Kurve gesucht, die zwei Punkte $P_1 = (x_1, y_1)$ und $P_2 = (x_2, y_2)$ mit $x_1 < x_2$ und $y_1 \geq y_2$ so verbindet, dass eine Kugel nur unter der Einwirkung der Schwerkraft ohne Reibung entlang der Kurve in kürzestmöglicher Zeit von P_1 nach P_2 kommt.



Sei nun $u : [x_1, x_2] \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion mit $u(x_1) = y_1$ und $u(x_2) = y_2$. Dann lässt sich die Laufzeit der Kugel durch

$$T(u) := \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\frac{1 + (u'(x))^2}{2g(u(x_1) - u(x))}}\, \mathrm{d}x$$

berechnen, wobei g die Erdbeschleunigung bezeichne. Bei dem Brachistochronenproblem ist demnach eine Funktion u gesucht, welche das Funktional T minimiert, also Lösung ist von

$$\min_{u \in U} T(u)$$

mit

$$U = \{u \in C^1 \mid u(x_1) = y_1,\ u(x_2) = y_2,\ 2g(u(x_1) - u(x)) > 0, \forall x \in [x_1, x_2]\}.$$

Modellieren Sie dieses Optimierungsproblem und lösen Sie es numerisch.

Aufgabe 10.3 (Schriftliche und Programmieraufgabe)[7 Punkte]
Seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$. Betrachte

$$Ax = b. \tag{1}$$

Ziel dieser Aufgabe ist es, eine Matrix $A' \in \mathbb{R}^{m'\times n}$ mit vollem Zeilenrang und $b' \in \mathbb{R}^{m'}$ zu bestimmen, so dass

$$A'x = b' \tag{2}$$

ein äquivalentes Gleichungssystem ist (d.h. die Lösungsmengen von (1) und (2) übereinstimmen). Überlegen Sie sich Ihr Vorgehen zunächst rigoros (schriftliche Aufgabe) und schreiben Sie dann eine Funktion (Programmieraufgabe)

```
function [A',b'] = Reduktion(A,b),
```

die das Gewünschte leistet.
Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis die QR-Zerlegung für A verwenden (siehe Skript zu Einführung in die Numerik, Bemerkung 2.39):

$$Q^*AE = \begin{pmatrix} R_1 & R_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} := R$$

wobei E eine Permutationsmatrix, Q eine unitäre Matrix und R_1 eine obere Dreiecksmatrix ist. Die QR-Zerlegung ist bereits mittels der Funktion $[Q, R, E] = qr(A)$ in Matlab implementiert.

Hinweise zur Übungsblattbearbeitung:

- Zu **schriftlichen Aufgaben** soll eine Ausarbeitung/Lösung angefertigt werden, welche am 15.01.2018 in Ihrer Übungsgruppe abzugeben ist.

- Zu **Programmieraufgaben** soll eine kommentierte Ausarbeitung in MATLAB-Code bis zum 15.01.2018 um 10:00 Uhr an **jahn@math.uni-frankfurt.de** geschickt werden. Bitte beginnen Sie die Betreffzeile Ihrer E-Mail mit **"Opt10_1819:"**.