Optimierung und inverse Probleme
Wintersemester 2018/19
Prof. Dr. Bastian von Harrach
M. Sc. Tim Jahn

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

1. Übungsblatt (erschienen am 16.10.2018)

Aufgabe 1.1 (Votieraufgabe)
Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine lineare Funktion, d.h. es gibt $a \in \mathbb{R}$ und $0 \neq b \in \mathbb{R}^n$, sodass $f(x) := a + b^\intercal x$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass f weder lokale noch globale Minima besitzt.

Aufgabe 1.2 (schriftliche Aufgabe)[4 Punkte]
Seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$ gegeben, A, $b \neq 0$.

(a) Zeigen Sie folgende Äquivalenz:

(i) $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ löst das *lineare Ausgleichsproblem*

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|Ax - b\|^2.$$

(ii) $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ löst die *Gaußsche Normalengleichung*

$$A^\intercal A x = A^\intercal b.$$

(b) Es gelte nun $Rang(A) = n$. Beweisen Sie die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ aus Aufgabenteil **(a)**.

Aufgabe 1.3 (Multiple Choice)
(a) Für eine Funktion $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und eine kompakte Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ gilt: Die Stetigkeit von g ist eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass g auf K ein Minimum annimmt.
wahr ☐ falsch ☐

(b) Die Bedingung $Rang(A) = n$ in Aufgabe **1.2b** ist notwendig für die Eindeutigkeit der Lösung.
wahr ☐ falsch ☐

(c) Die Bedingung $Rang(A) = n$ in Aufgabe **1.2b** ist notwendig für die Existenz der Lösung.
wahr ☐ falsch ☐

Aufgabe 1.4 (Votieraufgabe)
Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, $f : U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $x_0, x_1 \in U$. Zu $t \in \mathbb{R}$ sei $x_t := (1-t)x_0 + tx_1$ und es gelte $[x_0, x_1] := \{x_t : t \in [0,1]\} \subset U$. Zeigen Sie:

(a) Die Funktion

$$g : t \mapsto f(x_t)$$

ist auf einer Umgebung von $[0,1]$ stetig differenzierbar und es gilt

$$g'(t) = \nabla f(x_t)^\intercal (x_1 - x_0).$$

(b) Ist f zweimal stetig differenzierbar, dann ist auch g zweimal stetig differenzierbar und es gilt

$$g''(t) = (x_1 - x_0)^\intercal \nabla^2 f(x_t)(x_1 - x_0),$$

mit der Hesse-Matrix $\nabla^2 f$.

Aufgabe 1.5 (Programmieraufgabe)[5 Punkte]
Wir interessieren uns für das Minimalflächenproblem, vgl. Kapitel 1.3.1 der Vorlesung.

Dazu betrachten wir $\Omega := [0,1]^2 \subset \mathbb{R}^2$ und diskretisieren Ω durch ein äquidistantes Punktegitter mit der Schrittweite $h = 1/(n-1)$, $n \in \mathbb{N}$, sodass die Koordinaten der $N := n^2$ Punkte gegeben sind durch $x_{i+(j-1)n} := ((i-1)h, (j-1)h) \in \Omega$, $i, j = 1, \ldots, n$, vgl. Abbildung 1. Die so entstehenden Quadrate werden entsprechen Abbildung 1 halbiert, wodurch wir eine Triangulierung aus $2(n-1)^2$ Dreiecken erhalten.

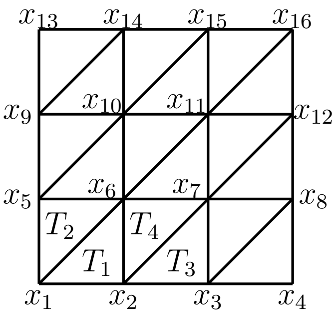

Abbildung 1: Die Triangulierung für $n = 4$.

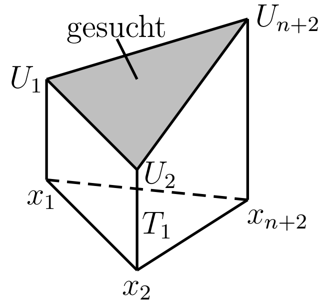

Abbildung 2: Beispiel der gesuchen Fläche des Graphen (grau) für T_1.

Wir approximieren die in Kapitel 1.3.1 der Vorlesung gesuchte Funktion u durch einen Vektor $U = (U_i)_{i=1}^N \in \mathbb{R}^N$ von Funktionsauswertungen $U_i = u(x_i)$, $i = 1, \ldots, N$ und interessieren uns für den Flächeninhalt $A(U)$ des Graphen der zugehörigen stetigen und stückweise linearen Funktionen, vgl. Abbildung 2.

(a) Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion

```
function [A] = Inhalt(U, n)
```

welche zu einem gegebenen Vektor $U \in \mathbb{R}^N$ von Funktionswerten den Flächeninhalt $A(U)$ des zugehörigen Graphen bestimmt.

(b) Testen Sie ihre Funktion am Beispiel $n = 6$ und $U = \mathbb{1} \in \mathbb{R}^N$, sowie $n = 4$ und $U = (0, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 2, 3, 4, 5, 3, 4, 5, 6)$. Veranschaulichen Sie die Flächen graphisch.

Hinweise zur Übungsblattbearbeitung:

- Zu **schriftlichen Aufgaben** soll eine Ausarbeitung/Lösung angefertigt werden, welche am 23.10.2018 in Ihrer Übungsgruppe abzugeben ist.

- Zu **Programmieraufgaben** soll eine kommentierte Ausarbeitung in MATLAB-Code bis zum 23.10.2018 um 10:00 Uhr an **jahn@mathematik.uni-frankfurt.de** geschickt werden. Bitte beginnen Sie die Betreffzeile Ihrer E-Mail mit **"Opt1_1819:"**.