Vorlesung Numerische Mathematik
Wintersemester 2019/20
Prof. Dr. Bastian von Harrach
M. Sc. Tim Jahn

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

9. Übungsblatt (korrigiert, erschienen am 13.12.2019)

Aufgabe 9.1 (Votieraufgabe)
Bestimmen Sie mithilfe von Householder-Transformationen die QR-Zerlegung der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 9.2 (Votieraufgabe)
Schreiben Sie einen Pseudocode, welcher die QR-Zerlegung einer injektiven Matrix $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ realisiert: dabei soll die Matrix R und eine weitere Matrix V ausgegeben werden, wobei V die notwendigen Informationen über Q enthält. Schreiben Sie damit einen weiteren Pseudocode, welcher mit Hilfe der Matrix V die Multiplikation Q^*x, für ein $x \in \mathbb{C}^n$, realisiert.

Aufgabe 9.3 (Rettet den Weihnachtsbaum - Programmieraufgabe)[6 Punkte]
Schreiben Sie eine `MATLAB`-Funktion `QR_decomp(A)`, welche Algorithmus 4 realisiert.

Laden Sie sich nun das `mat`-file „Weihnachtsbaum.mat“ von der Veranstaltungshomepage herunter. Mit Hilfe des `MATLAB`-Befehls `load` können Sie dieses in `MATLAB` extrahieren. Es enthält eine Matrix A und einen Vektor y. Betrachten Sie nun das folgende Problem:

Oh nein! Der Weihnachtsbaum wurde von der hinterlistigen Matrix A verwischt und ist nun im Vektor y gefangen. Aber bald ist Weihnachten! Können wir den Baum noch retten?

Retten Sie den Weihnachtsbaum! Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(i) Versuchen Sie zunächst, den Baum mittels der Gaußschen Normalengleichung zu retten, indem Sie $x = (A^*A)\backslash(A^*y)$ bestimmen.

(ii) Verwenden Sie nun ihre `MATLAB`-Funktion `QR_decomp` um das lineare Ausgleichsproblem

$$\min_x \|Ax - y\|$$

zu lösen.

Verwenden Sie jeweils die unten angegebene `MATLAB`-Funktion `Zeichne_Baum` um den Weihnachtsbaum schließlich in vollem Glanz erstrahlen zu lassen. Geben Sie die Visualisierungen (in moderater Größe) mit ab.

```
function Baum = Zeichne_Baum(x)
% Visualisiert das Ergebnis x des linearen Ausgleichproblems aus Aufgabe 10.4.
Baum = uint8(reshape(x,16,16,3));
imshow(Baum);
end
```

Aufgabe 9.4 (schriftliche Aufgabe)[6 Punkte]

Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ diagonalisierbar mit Eigenwerten $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq ...$ und sei v_1 ein zu λ_1 gehöriger Eigenvektor.Für $k \in \mathbb{N}$ definiere

$$\tilde{x}^{(k)} := Ax^{(k-1)} \quad \text{und} \quad x^{(k)} := \frac{\tilde{x}^{(k)}}{\|\tilde{x}^{(k)}\|},$$

mit Startwert $x^{(0)} \in \mathbb{C}$. Angenommen, $v_1^* x^{(0)} \neq 0$.

(a) Zeigen Sie, dass falls A selbstadjungiert ist, alle Häufungspunkte von $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ Eigenvektoren von A zu λ_1 sind.

(b) Finden Sie ein Beispiel dafür, dass in (a) auf die Annahme der Selbstadjungiertheit nicht verzichtet werden kann.

Hinweise zur Übungsblattbearbeitung:

- Zu **schriftlichen Aufgaben*** soll eine Ausarbeitung/Lösung angefertigt werden, die bis zum 17.12.2019 um 10:00 Uhr in den Kästen ihres Übungleiters im 3. Stock der Robert-Mayer-Str. 6-8 abzugeben ist. Die jeweilige Fachnummer entnehmen Sie der Homepage.
- Zu **Programmieraufgaben*** ist bis zum 17.12.2019 um 10:00 Uhr ein **kommentierter** `MATLAB`-Quellcode zu schreiben, welcher zusammen mit den (gegebenenfalls) damit erstellten Plots ausgedruckt und in den Kasten des Übungsleiters eingeworfen werden soll. Der Code ist nicht mehr per Mail einzureichen.
- Zu **Votieraufgaben** wird keine schriftliche Abgabe verlangt. Die Lösung wird in der Übung besprochen.

***Die Abgabe und Bearbeitung darf in Zweiergruppen erfolgen.**