Vorlesung Numerische Mathematik
Wintersemester 2019/20
Prof. Dr. Bastian von Harrach
M. Sc. Tim Jahn

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

7. Übungsblatt (erschienen am 26.11.2019)

Aufgabe 7.1 (Votieraufgabe)

Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ hermitisch und positiv definit mit Cholesky-Zerlegung $A = LL^*$. Zeigen Sie, dass für die Matrix L der Cholesky-Zerlegung

$$L = (l_{ij})_{i,j=1}^n = \begin{cases} \sqrt{a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{jk}\overline{l_{jk}}} & i = j \\ \frac{1}{l_{jj}}\left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}\overline{l_{jk}}\right) & i > j \end{cases}$$

gilt und folgern Sie damit die Eindeutigkeit der Cholesky-Zerlegung.

Aufgabe 7.2 (Programmieraufgabe)[6 Punkte]

Implementieren Sie in `MATLAB` die Cholesky-Zerlegung und lösen Sie damit ein lineares Gleichungssystems der Gestalt

$$Ax = b$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 29 & 36 & 43 \\ 3 & 36 & 109 & 126 \\ 4 & 43 & 126 & 246 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Schreiben Sie die Ergebnisse in den Quellcode.

Aufgabe 7.3 (Votieraufgabe)

(a) Gegeben seien endlich viele Messdaten $t_1, \ldots, t_l \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ und $x_1, \ldots, x_l \in \mathbb{R}$, $l \in \mathbb{N}$. Es wird vermutet, dass die Daten x_i in folgender Weise von den Daten t_i abhängen:

$$x(t) = \alpha_0 t^2 + \alpha_1 \pi \sin(2t) + \alpha_2 t \log(t) + \alpha_3,$$

mit gewissen Koeffizienten $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, 2, 3$. Geben Sie das lineare Ausgleichsproblem zur näherungsweisen Bestimmung der Koeffizienten α_i an.

(b) Gehen Sie nun analog für einen vermuteten linearen Zusammenhang $x = a\,t + b$ vor, und bestimmen Sie so die Ausgleichsgerade durch die folgenden Datenpunkte:

t	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4
x	3.72	4.1	5.37	5.9	6.8	7.6	8.0	8.7

Zeichnen Sie die Datenpunkte und die Ausgleichsgerade.

Aufgabe 7.4 (schriftliche Aufgabe)[2+2+2 Punkte]
Beweisen Sie Satz 2.25 aus der Vorlesung:
Sei $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ und $A^+ \in \mathbb{C}^{n \times m}$ die Moore-Penrose Inverse.

(a) $\mathcal{N}(A^+) = \mathcal{N}(A^*) = \mathcal{R}(A)^\perp$, $\mathcal{R}(A^+) = \mathcal{R}(A^*) = \mathcal{N}(A)^\perp$.

(b) A^+ erfüllt die Moore-Penrose Axiome

$$AA^+A = A, \quad (AA^+)^* = AA^+, \quad A^+AA^+ = A^+, \quad (A^+A)^* = A^+A.$$

(c) A^+ besitzt die Singulärwertzerlegung

$$A^+u_j = \sigma_j^{-1}v_j, \quad (A^+)^*v_j = \sigma_j^{-1}u_j.$$

Hinweise zur Übungsblattbearbeitung:

- Zu **schriftlichen Aufgaben*** soll eine Ausarbeitung/Lösung angefertigt werden, die bis zum 03.12.2019 um 10:00 Uhr in den Kästen ihres Übungleiters im 3. Stock der Robert-Mayer-Str. 6-8 abzugeben ist. Die jeweilige Fachnummer entnehmen Sie der Homepage.

- Zu **Programmieraufgaben*** ist bis zum 03.12.2019 um 10:00 Uhr ein **kommentierter** `MATLAB`-Quellcode zu schreiben, welcher zusammen mit den (gegebenenfalls) damit erstellten Plots ausgedruckt und in den Kasten des Übungsleiters eingeworfen werden soll. Der Code ist nicht mehr per Mail einzureichen.

- Zu **Votieraufgaben** wird keine schriftliche Abgabe verlangt. Die Lösung wird in der Übung besprochen.

*__Die Abgabe und Bearbeitung darf in Zweiergruppen erfolgen.__