

6. Übungsblatt (erschieden am 19.11.2019)

Aufgabe 6.1 (Votieraufgabe)

Sei $\|\cdot\|$ eine Norm in \mathbb{C}^n . Zeigen Sie:

(a) Durch

$$\|A\|_{\text{ind}} := \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}, \quad A \in \mathbb{C}^{n \times n}$$

wird eine Matrixnorm in $\mathbb{C}^{n \times n}$, die sogenannte *induzierte Norm* definiert.

(b) Die induzierte Norm ist mit der Ausgangsnorm verträglich und submultiplikativ.

(c) Für jede andere mit der Ausgangsnorm verträgliche Norm $\|\cdot\|_{\text{vertr}}$ in $\mathbb{C}^{n \times n}$ gilt

$$\|A\|_{\text{ind}} \leq \|A\|_{\text{vertr}} \quad \forall A \in \mathbb{C}^{n \times n}.$$

Aufgabe 6.2 (Votieraufgabe)

Zeigen Sie:

(a) Die Spaltensummennorm ist die durch die Betragssummennorm induzierte Norm.

(b) Die Zeilensummennorm ist die durch die Maximumsnorm induzierte Norm.

(c) Die Frobeniusnorm ist mit der Euklid-Norm verträglich, jedoch wird die Frobeniusnorm nicht durch die Euklid-Norm induziert.

(d) Es seien $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ reguläre Matrizen und $\|\cdot\|_M$ eine Matrixnorm. Zeigen Sie:

(i) $\text{cond}_M(AB) \leq \text{cond}_M(A) \cdot \text{cond}_M(B)$ für jede submultiplikative Matrixnorm.

(ii) $\text{cond}_M(cA) = \text{cond}_M(A)$ für alle $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Aufgabe 6.3 (schriftliche Aufgabe)[3+3 Punkte]

Sei $\|\cdot\|$ eine beliebige Norm in \mathbb{C}^n und $\|\cdot\|_M$ die induzierte Matrixnorm in $\mathbb{C}^{n \times n}$. Zeigen Sie:

(a) Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mit $\|A\|_M < 1$. Zeigen Sie, dass $(I + A)^{-1}$ existiert und die Ungleichung

$$\frac{1}{1 + \|A\|_M} \leq \|(I + A)^{-1}\|_M \leq \frac{1}{1 - \|A\|_M}$$

gilt.

(b) Seien $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ regulär, $b \in \mathbb{C}^n$, $b \neq 0$, und $x \neq 0$ die Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$. Weiterhin seien $\Delta b \in \mathbb{C}^n$ und $\Delta A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mit $\|\Delta A\|_M \|A^{-1}\|_M < 1$. Zeigen Sie, dass

$$(A + \Delta A)\tilde{x} = b + \Delta b$$

eindeutig lösbar ist, und dass für die Lösung $\tilde{x} = x + \Delta x$ gilt:

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\text{cond}_M(A)}{1 - \text{cond}_M(A) \frac{\|\Delta A\|_M}{\|A\|_M}} \cdot \left(\frac{\|\Delta A\|_M}{\|A\|_M} + \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \right).$$

Aufgabe 6.4 (Programmieraufgabe)[6 Punkte]

Implementieren Sie die LR-Zerlegung ohne Pivotsuche (Algorithmus 1) in MATLAB, sowie die Vorwärts- und Rückwärtssubstitution. Lösen Sie damit das Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & 6 \\ -4 & -5 & 15 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix}.$$

Implementieren Sie nun auch die LR-Zerlegung mit Pivotsuche (Algorithmus 2). Verwenden Sie dabei die relative Spaltenpivotsuche, siehe Abschnitt 2.1.6. Lösen Sie damit das Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie für beide Beispiele die Lösungsvektoren sowie die Faktoren L, R sowie (gegebenfalls) die Permutationsmatrix P auskommentiert im Quellcode an.

Hinweise zur Übungsblattbearbeitung:

- Zu **schriftlichen Aufgaben*** soll eine Ausarbeitung/Lösung angefertigt werden, die bis zum 26.11.2019 um 10:00 Uhr in den Kästen ihres Übungsleiters im 3. Stock der Robert-Mayer-Str. 6-8 abzugeben ist. Die jeweilige Fachnummer entnehmen Sie der Homepage.
- Zu **Programmieraufgaben*** ist bis zum 26.11.2019 um 10:00 Uhr ein **kommentierter** MATLAB-Quellcode zu schreiben, welcher zusammen mit den (gegebenenfalls) damit erstellten Plots ausgedruckt und in den Kasten des Übungsleiters eingeworfen werden soll. Der Code ist nicht mehr per Mail einzureichen.
- Zu **Votieraufgaben** wird keine schriftliche Abgabe verlangt. Die Lösung wird in der Übung besprochen.

*Die Abgabe und Bearbeitung darf in Zweiergruppen erfolgen.