Vorlesung Numerische Mathematik
Wintersemester 2019/20
Prof. Dr. Bastian von Harrach
M. Sc. Tim Jahn

GOETHE
UNIVERSITÄT
FRANKFURT AM MAIN

5. Übungsblatt (korrigierte Fassung vom 20.11.2019)

Aufgabe 5.1 (Votieraufgabe)
Für $f, g, w \in C([a,b])$,$w(x) > 0$ für alle $x \in (a,b)$, sei durch $\langle f, g\rangle := \int_a^b w(x)f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ ein Skalarprodukt definiert. Weiter sei $(T_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge paarweise orthogonaler Polynome bezüglich dieses Skalarproduktes, T_n habe Grad n und Leitkoeffizient 1. Zeigen Sie, dass die T_n für $n \geq 0$ einer Drei-Term-Rekursion

$$T_{n+1}(x) = x\,T_n(x) - \alpha_n\,T_n(x) - \beta_n\,T_{n-1}(x)$$

für gewisse Parameter $\alpha_n, \beta_n \in \mathbb{R}$ genügen, wobei $T_0 := 1$, $T_{-1} := 0$.

Aufgabe 5.2 (schriftliche Aufgabe)[3+3 Punkte]
Aus der Vorlesung und den Übungen kennen Sie bereits die Gauß-Formeln zu $w \equiv 1$ (Gauß-Legendre-Formel) und $w = (1-x^2)^{-1/2}$ (Gauß-Tschebyscheff-Formel).

(a) Bestimmen Sie die Knoten und die Gewichte der zweistufigen Gauß-Formel zur näherungsweisen Berechnung von

$$I[f; 1-x] = \int_0^1 f(x)(1-x)\mathrm{d}x.$$

(b) Wir konstruieren eine Quadraturformel zur Approximation des Integrals $\int_\Delta f$ einer Funktion f über dem Dreieck $\Delta := \{(x,y) \mid 0 \leq x, y \leq 1,\ x+y \leq 1\}$.
Zunächst gilt nach dem Satz von Fubini

$$\int_\Delta f = \int_0^1 \int_0^{1-x} f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x.$$

Approximieren Sie nun erst das innere und dann das äußere Integral durch geeignete zweipunktige Gauß-Formeln. Verwenden Sie dabei auch den Aufgabenteil (a).

Aufgabe 5.3 (Programmieraufgabe)[3 Punkte]
Implementieren Sie den Golub-Welsh Algorithmus zur numerischen Berechnung von

$$\int_{-1}^1 f(x)\,\mathrm{d}x$$

entsprechend Satz 1.26 aus der Vorlesung. Zur Berechnung der Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix A kann die `MATLAB`-Funktion `[V,D] = eig(A)` verwendet werden. Approximieren Sie damit $\int_{-1}^1 \sin(\frac{7}{4}\pi x + \frac{1}{4}\pi)\,\mathrm{d}x$ für $m = 1, 11, 21, ..., 101$ Stützstellen und plotten Sie (logarithmiert) den absoluten Fehler gegen die Anzahl der Stützstellen.

Aufgabe 5.4 (Votieraufgabe)
Sei $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $l \in \mathbb{N}$ mit $a_{ij} = 0$, für alle $i, j \leq n$ mit $|i - j| > l$ (A ist eine Bandmatrix mit Bandbreite l). Angenommen Algorithmus 1 angewandt auf A gibt keine Fehlermeldung (das Pivotelement ist also immer ungleich 0). Weisen Sie nach, dass dann die Faktoren L und R der LR-Zerlegung von A ebenfalls Bandbreite l haben, sich damit also der Aufwand zur Berechnung jener auf $l^2 n$ Multiplikationen bzw. Divisionen reduziert.

Hinweise zur Übungsblattbearbeitung:

- Zu **schriftlichen Aufgaben*** soll eine Ausarbeitung/Lösung angefertigt werden, die bis zum 19.11.2019 um 10:00 Uhr in den Kästen ihres Übungleiters im 3. Stock der Robert-Mayer-Str. 6-8 abzugeben ist. Die jeweilige Fachnummer entnehmen Sie der Homepage.

- Zu **Programmieraufgaben*** ist bis zum 19.11.2019 um 10:00 Uhr ein **kommentierter** `MATLAB`-Quellcode zu schreiben, welcher zusammen mit den (gegebenenfalls) damit erstellten Plots ausgedruckt und in den Kasten des Übungsleiters eingeworfen werden soll. Der Code ist nicht mehr per Mail einzureichen.

- Zu **Votieraufgaben** wird keine schriftliche Abgabe verlangt. Die Lösung wird in der Übung besprochen.

***Die Abgabe und Bearbeitung darf in Zweiergruppen erfolgen.**