Vorlesung Numerische Mathematik
Wintersemester 2019/20
Prof. Dr. Bastian von Harrach
M. Sc. Tim Jahn

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

Aktualisiertes 2. Übungsblatt (erschienen am 24.10.2019)

Aufgabe 2.1 (Votieraufgabe)
Sei $m \in \mathbb{N}$ und $x_1, ..., x_m \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass für die Vandermonde Matrix

$$V_m := \begin{pmatrix} x_1^0 & ... & x_1^{m-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_m^0 & ... & x_m^{m-1} \end{pmatrix}$$

gilt, dass $det(V_m) = \prod_{1 \leq j < k \leq m} (x_k - x_j)$, wobei nach Konvention $\prod_{1 \leq j < k \leq 0} = 1$.

Aufgabe 2.2 (schriftliche Aufgabe)[6 Punkte]
Die *Hermite-Interpolationsaufgabe* besteht darin, zu vorgegebenen Knoten $x_1, \dots, x_m$ neben Funktionswerten $f(x_1), \dots, f(x_m)$ auch die Werte der Ableitung $f'(x_1), \dots, f'(x_m)$ miteinzubeziehen. Wir wollen ein Polynom p vom Grad $2m-1$ so bestimmen, dass

$$p(x_i) = f(x_i) \quad \text{und} \quad p'(x_i) = f'(x_i) \quad \text{für} \quad i = 1, \dots, m \quad \text{gilt.}$$

(a) Zeigen Sie, dass höchstens ein solches Polynom $p \in \Pi_{2m-1}$ existiert.

(b) Konstruieren Sie die Polynome q_i, $r_i \in \Pi_{2m-1}$ mit den Eigenschaften

$$q_i(x_j) = \delta_{ij}, \quad q_i'(x_j) = 0, \tag{1}$$
$$r_i(x_j) = 0, \quad r_i'(x_j) = \delta_{ij}, \tag{2}$$

für $i, j = 1, \dots, m$ und geben Sie damit die Lösung der Hermite-Interpolationsaufgabe explizit an. Zeigen Sie dazu, dass die Polynome

$$q_i(x) = (\alpha_i x + \beta_i) l_i^2(x) \quad \text{und} \quad r_i(x) = (\tilde{\alpha}_i x + \tilde{\beta}_i) l_i^2(x)$$

mit geeigneten Koeffizienten α_i, $\tilde{\alpha}_i$, β, $\tilde{\beta}_i \in \mathbb{R}$ die Bedingungen (1) bzw. (2) erfüllen; hierbei sind l_i die Lagrange-Grundpolynome. Berechnen Sie die Koeffizienten α_i, $\tilde{\alpha}_i$, β_i, $\tilde{\beta}_i \in \mathbb{R}$ ohne die Ableitung der Lagrange-Grundpolynome explizit auszurechnen.

(c) Bestimmen Sie das Hermite-Interpolationspolynom für $x_1 = 0$, $x_2 = \pi/2$, $p(x_1) = f(x_1)$, $p(x_2) = f(x_2)$ sowie $p'(x_1) = f'(x_1)$, $p'(x_2) = f'(x_2)$ mit $f(x) = \cos x$.

Aufgabe 2.3 (Votieraufgabe)
Seien $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_2', y_3 \in \mathbb{R}$ mit $x_1 < x_2 < x_3$.

(a) Existiert ein eindeutiges Polynom $p \in \Pi_1$, mit $p(x_1) = y_1$ und $p'(x_2) = y_2$?

(b) Existiert ein eindeutiges Polynom $p \in \Pi_1$, mit $p'(x_1) = y_1$ und $p'(x_2) = y_2$?

(c) Existiert ein eindeutiges Polynom $p \in \Pi_2$, mit $p(x_1) = y_1, p(x_3) = y_3$ und $p'(x_2) = y_2'$?

Aufgabe 2.4 (Programmieraufgabe)[6 Punkte]

(a) Schreiben Sie eine `MATLAB`-Funktion, die eine Funktion für äquidistante Stützstellen $x_1 < x_2 < \cdots < x_m$ und vorgegebene Funktionswerte $f(x_1), \ldots, f(x_m)$ auf dem Intervall $[x_1, x_m]$ mittels eines Polynomes vom Grade $m-1$ interpoliert. Verwenden Sie die Vandermonde Matrix um die Koeffizienten des Polynoms auszurechnen.
Hinweis: Ein Gleichungssystem $Ax = b$ löst `MATLAB` mit dem Befehl `x = A\b`, siehe auch `help \` in `MATLAB`.

(b) Interpolieren Sie die Funktionen `exp, sin` auf dem Intervall $[-5, 5]$ jeweils mit Polynomen vom Grad 5 und 10. Geben Sie jeweils die Interpolationspolynome und den Graph der zu interpolierenden Funktion in einem einzigen Plot aus.
Hinweis: Die `MATLAB`-Funktion `polyval` ist hier hilfreich.

(c) Was beobachtet man, wenn man das Interpolationspolynom zu $f(x) := \frac{1}{1+x^2}$ auf dem Intervall $[-5, 5]$ für verschiedene Anzahlen von Stützstellen darstellt?

Hinweise zur Übungsblattbearbeitung:

- Zu **schriftlichen Aufgaben*** soll eine Ausarbeitung/Lösung angefertigt werden, die bis zum 29.10.2019 um 10:00 Uhr in den Kästen ihres Übungleiters im 3. Stock der Robert-Mayer-Str. 6-8 abzugeben ist. Die jeweilige Fachnummer entnehmen Sie der Homepage.

- Zu **Programmieraufgaben*** ist bis zum 29.10.2019 um 10:00 Uhr ein **kommentierter** `MATLAB`-Quellcode zu schreiben, welcher zusammen mit den damit erstellten Plots ausgedruckt und in den Kasten des Übungsleiters eingeworfen werden soll. Der Code ist nicht mehr per Mail einzureichen.

- Zu **Votieraufgaben** wird keine schriftliche Abgabe verlangt. Die Lösung wird in der Übung besprochen.

***Die Abgabe und Bearbeitung darf in Zweiergruppen erfolgen.**