Prof. Dr. Bastian von Harrach
M. Sc. Tim Jahn

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

12. Übungsblatt (aktualisiert am 26.01.2020)

Aufgabe 12.1 (Votieraufgabe)

(a) Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ eine Folge, die gegen $\hat{x}$ konvergiert mit $\|x_{k+1}-\hat{x}\|/\|x_k-\hat{x}\| \to 0$ für $k\to\infty$. Zeigen Sie, dass dann $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ superlinear gegen $\hat{x}$ konvergiert und dass

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\|x_{k+1}-x_k\|}{\|x_k-\hat{x}\|} = 1.$$

(In der Nähe der Lösung ist also $\|x_{k+1}-x_k\| \approx \|x_k-\hat{x}\|$.)

(b) Sei $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine positive Nullfolge, mit $\varepsilon_{k+1} \leq C\varepsilon_k\varepsilon_{k-1}$ für $k\geq 2$, $C>0$ und $\varepsilon_1,\varepsilon_2 < 1/C$. Zeigen Sie, dass dann $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{N}}$ superlinear konvergiert.

Aufgabe 12.2 (Votieraufgabe)

Zeigen Sie den erweiterten Mittelwertsatz: Seien $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ differenzierbar in (a,b) und $g'(x)\neq 0$ in (a,b) sowie $g(a)\neq g(b)$. Dann exisiert ein $\xi\in[a,b]$ mit

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

Aufgabe 12.3 (schriftliche Aufgabe)[6 Punkte]

Sei f zweimal stetig differenzierbar in $[a,b]$ und sei $\hat{x}\in(a,b)$ eine Nullstelle von f mit $f'(\hat{x}), f''(\hat{x})\neq 0$. Wir betrachten das Sekantenverfahren: Ausgehend von zwei Startnäherungen x_0, x_1, bestimme für $k\geq 1$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k)-f(x_{k-1})} f(x_k) = \frac{x_{k-1}f(x_k) - x_k f(x_{k-1})}{f(x_k)-f(x_{k-1})}.$$

Zeigen Sie, dass x_k lokal superlinear gegen $\hat{x}$ konvergiert, falls $f(x_k)\neq f(x_{k-1})$ für alle $k\geq 1$.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass der Fehler $e_k = \hat{x} - x_k$ für $k\geq 1$ die Rekursion

$$\frac{e_{k+1}}{e_k e_{k-1}} = \frac{g(x_k)-g(x_{k-1})}{f(x_k)-f(x_{k-1})} \tag{1}$$

mit $g(x) = \frac{f(x)}{\hat{x}-x}$ für $x\neq\hat{x}$ und $g(\hat{x}) = -f'(\hat{x})$ erfüllt und verwenden Sie dann 12.2 und 12.1.

Aufgabe 12.4 (Programmieraufgabe)[6 Punkte]
Betrachten Sie die mehrdimensionale, stetig differenzierbare Funktion

$$F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 : (\xi, \eta)^\intercal \longrightarrow \frac{1}{6} \begin{pmatrix} \xi e^{-\eta^2} + \xi\eta - 6\xi + 3 \\ \log(1 + \eta^2 + \xi^2) - 6\eta - 1 \end{pmatrix}.$$

Vergewissern Sie sich, dass die Nullstellenaufgabe $F(x) = 0$, $x = (\xi, \eta)^\intercal$, äquivalent ist zu der Fixpunktaufgabe aus Aufgabe 10.4. Implementieren Sie das mehrdimensionale Newton-Verfahren, um die Nullstelleaufgabe zu lösen. Das Verfahren soll dabei abbrechen, sobald

$$\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\| \leq 10^{-N}$$

für $N \in \mathbb{N}$ ist. Das Verfahren soll dabei den Iterationsverlauf und die benötigte Anzahl an Iterationen ausgeben. Verwenden Sie den Startwert $x^{(0)} = (0, -1)^\intercal$ und testen Sie ihr Verfahren für $N = 1, 2, \ldots, 15$. Plotten Sie die Anzahl der benötigten Iterationen des Newtonverfahrens wie auch jene der Fixpunktiteration aus 10.4 semilogarithmisch über N ('semilogy').

Hinweise zur Übungsblattbearbeitung:

- Zu **schriftlichen Aufgaben*** soll eine Ausarbeitung/Lösung angefertigt werden, die bis zum 28.01.2020 um 10:00 Uhr in den Kästen ihres Übungleiters im 3. Stock der Robert-Mayer-Str. 6-8 abzugeben ist. Die jeweilige Fachnummer entnehmen Sie der Homepage.
- Zu **Programmieraufgaben*** ist bis zum 28.01.2020 um 10:00 Uhr ein **kommentierter** `MATLAB`-Quellcode zu schreiben, welcher zusammen mit den (gegebenenfalls) damit erstellten Plots ausgedruckt und in den Kasten des Übungsleiters eingeworfen werden soll. Der Code ist nicht mehr per Mail einzureichen.
- Zu **Votieraufgaben** wird keine schriftliche Abgabe verlangt. Die Lösung wird in der Übung besprochen.

*__Die Abgabe und Bearbeitung darf in Zweiergruppen erfolgen.__