Vorlesung Numerische Mathematik
Wintersemester 2019/20
Prof. Dr. Bastian von Harrach
M. Sc. Tim Jahn

11. Übungsblatt (erschienen am 14.01.2020)

Aufgabe 11.1 (schriftliche Aufgabe)[6 Punkte]
Seien $f, g : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) := \frac{1}{2}x^T Ax + x^T Cy - d^T x \quad \text{und} \quad g(x,y) := \frac{1}{2}y^T By - y^T Cx + e^T y,$$

wobei $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrische, positiv definite Matrizen seien, $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch, $d, e \in \mathbb{R}^n$. Ein Vektor $(x^*, y^*) \in \mathbb{R}^{2n}$ heißt *Nash-Gleichgewicht*, falls gilt:

$$f(x^*, y^*) \leq f(x, y^*) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n,$$

und

$$g(x^*, y^*) \leq g(x^*, y) \quad \text{für alle } y \in \mathbb{R}^n.$$

(a) Zeigen Sie, dass genau ein Nash-Gleichgewicht existiert.
Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass für eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $h : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ und einen Punkt $z \in \mathbb{R}^k$ gilt:

  (i) Ist z ein lokales Minimum von h, dann gilt $\nabla h(z) = 0$.

  (ii) Ist $\nabla h(z) = 0$ und $\nabla^2 h(z)$ positiv definit, dann ist $h(z)$ ein striktes lokales Minimum von h.

(b) Berechnen Sie für $y \in \mathbb{R}^n$ gegeben

$$\hat{x} := \arg\min_{x\in\mathbb{R}^n} f(x, y),$$

sowie für $x \in \mathbb{R}^n$ gegeben

$$\hat{y} := \arg\min_{y\in\mathbb{R}^n} g(x, y).$$

(c) Für $k \in \mathbb{N}$ sei

$$x^{(k+1)} := \arg\min_{x\in\mathbb{R}^n} f(x, y^{(k)})$$

sowie

$$y^{(k+1)} := \arg\min_{y\in\mathbb{R}^n} g(x^{(k)}, y).$$

Formulieren Sie dies als Fixpunktiteration

$$\Phi : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}, \quad z^{(k+1)} := \Phi(z^{(k)})$$

und geben Sie eine allgemeine Bedingung an A, B, C an, die garantiert, dass das so definierte Fixpunktverfahren konvergiert.

Aufgabe 11.2 (Programmieraufgabe)[6 Punkte]
Laden Sie von der Vorlesungshomepage die Funktion `[A,y,x] = createsparse(n)`. Zu gegebenem $n \in \mathbb{N}$ gibt die Funktion A, y, x aus, wobei $Ax = y$ und $A \in \mathbb{R}^{n^2 \times n^2}$ dünn besetzt und diagonaldominant ist (solche Matrizen treten bei der Diskretisierung parabolischer Differentialgleichungen auf). Implementieren Sie zur Lösung das Jacobi-Verfahren mit einer Iterationszahl von $k = 10$. Achten Sie dazu darauf, dass alle Matrizen 'sparse' sind, siehe 'spdiags'.
Testen Sie ihr Verfahren für $n = 3000$ mit dem Nullvektor als Startvektor und stellen Sie den Fehler $\|x^{(i)} - x\|_\infty$, $i = 1, ..., k$ als loglog-Plot dar. Vergleichen Sie auch die Laufzeit des Jacobi-Verfahrens mit derer der LR-Zerlegung (Sie können dazu den Backslash-Operator und 'tic' und 'toc' nutzen) für $n = 30, 300, 3000$.

Aufgabe 11.3 (Votieraufgabe)
Sei $a > 0$ eine beliebige reelle Zahl. Betrachtet wird die Fixpunktiteration

$$x^{(k+1)} = \Phi(x^{(k)}) = \frac{1}{2}\left(x^{(k)} + \frac{a}{x^{(k)}}\right).$$

Zeigen Sie, dass diese für jeden Startpunkt $x^{(0)} \in (0, \infty)$ gegen $\sqrt{a}$ konvergiert.

Hinweise zur Übungsblattbearbeitung:

- Zu **schriftlichen Aufgaben*** soll eine Ausarbeitung/Lösung angefertigt werden, die bis zum 21.01.2020 um 10:00 Uhr in den Kästen ihres Übungleiters im 3. Stock der Robert-Mayer-Str. 6-8 abzugeben ist. Die jeweilige Fachnummer entnehmen Sie der Homepage.
- Zu **Programmieraufgaben*** ist bis zum 21.01.2020 um 10:00 Uhr ein **kommentierter** `MATLAB`-Quellcode zu schreiben, welcher zusammen mit den (gegebenenfalls) damit erstellten Plots ausgedruckt und in den Kasten des Übungsleiters eingeworfen werden soll. Der Code ist nicht mehr per Mail einzureichen.
- Zu **Votieraufgaben** wird keine schriftliche Abgabe verlangt. Die Lösung wird in der Übung besprochen.

***Die Abgabe und Bearbeitung darf in Zweiergruppen erfolgen.**