Vorlesung Numerische Mathematik
Wintersemester 2019/20
Prof. Dr. Bastian von Harrach
M. Sc. Tim Jahn

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

10. Übungsblatt (erschienen am 17.12.2019)

Aufgabe 10.1 (Votieraufgabe)

(a) Sei $\|\cdot\|_*$ eine Vektornorm und $\|\cdot\|_*$ die davon induzierte Matrixnorm. Zeigen Sie, dass für jede reguläre Matrix $S \in \mathbb{C}^{n\times n}$ durch $\|x\|_S := \|Sx\|_*$, für $x \in \mathbb{C}^n$, eine Vektornorm definiert wird und $\|A\|_S := \|SAS^{-1}\|_*$ die zugehörige induzierte Matrixnorm ist.

(b) Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Weisen Sie nach, dass der *Spektralradius* $\rho(A)$,

$$\rho(A) := \max\{|\lambda| \ : \ \lambda \text{ ist Eigenwert von } A\}$$

im Allgemeinen keine Matrixnorm ist

(c) Zeigen Sie, dass zu jeder Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit Spektralradius $\rho(A)$ für jedes $\varepsilon > 0$ eine von einer Vektornorm induzierte Matrixnorm $\|\cdot\|_*$ existiert mit $\|A\|_* < \rho(A) + \epsilon$.
Hinweis: : Verwenden Sie Teil (a) mit $S := D^{-1}V^{-1}$, wobei $V \in \mathbb{C}^{n\times n}$, so gewählt sei, dass $V^{-1}AV$ Jordan-Normalform besitzt, und

$$D = \begin{pmatrix} \varepsilon & & & 0 \\ & \varepsilon^2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \varepsilon^n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad 0 < \varepsilon < 1.$$

Aufgabe 10.2 (schriftliche Aufgabe)[6 Punkte]

Sei $T \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $c \in \mathbb{C}^n$. Die Abbildung $\Phi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ sei definiert durch

$$\Phi(x) = Tx + c.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Fixpunktiteration $x^{(k+1)} := \Phi(x^{(k)})$ genau dann für jeden Startwert $x^{(0)} \in \mathbb{C}^n$ gegen ein eindeutiges $\hat{x}$ konvergiert, wenn $\rho(T) < 1$ ist, wobei $\rho(T)$ den Spektralradius von T bezeichnet.

(b) Sei $\rho(T) < 1$ und $\hat{x}$ ein Fixpunkt. Zeigen Sie, dass

$$\sup_{x^{(0)}\in\mathbb{C}^n} \limsup_{k\to\infty} \|x^{(k)} - \hat{x}\|^{1/k} = \rho(T).$$

Hinweis: Nutzen Sie Aufgabe 1.

Aufgabe 10.3 (Votieraufgabe)
Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Es sei $x_0 = (1,1,1)^T$. Zeigen Sie, dass das Jacobi-Verfahren zur Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$ mit dem Startwert x_0 konvergiert, das Gauß-Seidel Verfahren hingegen nicht. Bestimmen Sie den Grenzwert der Jacobi-Iteration.

Aufgabe 10.4 (Programmieraufgabe)[6 Punkte]
Betrachtet wird die Fixpunktaufgabe $x = \Phi(x), x = (\xi, \eta)^T$, mit

$$\Phi(x) = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} \xi e^{-\eta^2} + \xi\eta + 3 \\ \ln(1 + \eta^2 + \xi^2) - 1 \end{pmatrix}$$

auf dem Intervall $I = [0,1] \times [-1,1]$.

(a) Weisen Sie die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes mit $q = \frac{5}{6}$ bezüglich der Maximumsnorm nach.

(b) Es seien $x^{(k)}$ die Iterierten der Fixpunktiteration $x^{(k+1)} = \Phi(x^{(k)})$ mit Startvektor $x^{(0)} = (0,-1)^T$ und $\hat{x}$ bezeichne den Fixpunkt von Φ auf I. Implementieren Sie die Fixpunktiteration in `MATLAB`. Das Verfahren soll abbrechen, sobald

$$\|x^{(k)} - \hat{x}\| \leq 10^{-N}$$

für $N \in \mathbb{N}$. Realisieren Sie diese Abbruchsbedingung jeweils mit

- der a-priori Schranke aus Satz 3.1 (b),
- der a-posteriori Schranke aus Satz 3.1 (c).

Das Verfahren soll dabei den Iterationsverlauf und die benötigte Anzahl an Iterationen ausgeben. Testen Sie ihr Verfahren für $N = 1, 2, \ldots, 10$ und plotten Sie für beide Möglichkeiten die Anzahl der benötigten Iterationen über N (in einen gemeinsamen Graph).
Anmerkung: Dass der Fehler $\|x^{(k)} - \hat{x}\| \leq 10^{-N}$ ist, bedeutet anschaulich gerade, dass $x^{(k)}$ schon $N-1$ richtige Nachkommastellen von $\hat{x}$ besitzt.

Hinweise zur Übungsblattbearbeitung:

- Zu **schriftlichen Aufgaben*** soll eine Ausarbeitung/Lösung angefertigt werden, die bis zum 14.01.2020 um 10:00 Uhr in den Kästen ihres Übungleiters im 3. Stock der Robert-Mayer-Str. 6-8 abzugeben ist. Die jeweilige Fachnummer entnehmen Sie der Homepage.

- Zu **Programmieraufgaben*** ist bis zum 14.01.2020 um 10:00 Uhr ein **kommentierter** `MATLAB`-Quellcode zu schreiben, welcher zusammen mit den (gegebenenfalls) damit erstellten Plots ausgedruckt und in den Kasten des Übungsleiters eingeworfen werden soll. Der Code ist nicht mehr per Mail einzureichen.

- Zu **Votieraufgaben** wird keine schriftliche Abgabe verlangt. Die Lösung wird in der Übung besprochen.

***Die Abgabe und Bearbeitung darf in Zweiergruppen erfolgen.**