Numerik von Differentialgleichungen
Sommersemester 2020
Prof. Dr. Bastian von Harrach
Dr. Sarah Eberle
M. Sc. Tim Jahn

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

9. Übungsblatt (erschienen am 16.06.2020)

Aufgabe 9.1 (schriftliche Aufgabe)[6 Punkte]
Zur Berechnung der diskreten Approximation $y_i \approx y(x_i)$, $i \in \mathbb{N}_0$ (mit konstanter Schrittweite $h > 0$ und $x_i = x_0 + ih$) an die Lösung des AWPs

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad y(x_0) = y_0 \in \mathbb{R},$$

betrachten wir ein Milne-Simpson-Verfahren von der Form

$$y_{i+1} = y_{i-1} + h \sum_{j=1}^{m+1} \beta_j f_{i-m+j}, \quad i \in \mathbb{N} \quad \text{mit} \quad f_{i-m+j} := f(x_{i-m+j}, y_{i-m+j}),$$

wobei $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{m+1}$, wie im Abschnitt 1.7.1 der Vorlesung beschrieben, gegeben sind.

Im Folgenden Betrachten wir das Verfahren für $m = 2$ und unter der Annahme, dass die Funktion f des AWPs die Generalvoraussetzung aus Abschnitt 1.4 erfülle:

(a) Zeigen Sie, dass $(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (1/3, 4/3, 1/3)$ gilt.

(b) Beweisen Sie, dass das Verfahren Konsistenzordnung 4 hat. Beschränken Sie sich dabei auf skalare DGLn $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ y'(x) = f(x, y(x))$.

Hinweis: Für $g \in C^4(\mathbb{R})$, $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ sei die Simpson-Quadraturformel gegeben durch

$$S[g] = \frac{b-a}{6}\left(g(a) + 4g\left(\frac{a+b}{2}\right) + g(b)\right) \approx \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

Ferner gilt die folgende Fehlerabschätzung: für $h := \frac{b-a}{2}$ existiert ein $\xi \in [a, b]$ mit

$$\left| S[g] - \int_a^b g(x)\mathrm{d}x \right| = \frac{h^5}{90}\left|g^{(4)}(\xi)\right|.$$

Aufgabe 9.2 (Votieraufgabe)

(a) Bestimmen Sie die Formel der BDF-Methode aus Abschnitt 1.7.3 der Vorlesung für $m = 2$.

(b) Zeigen Sie, dass die Adams-Bashforth Methode mit $m = 2$ aus Beispiel 1.48 der Vorlesung genau Konsistenzordnung 2 hat. Beschränken Sie sich dabei auf skalare autonome DGLn $y'(x) = f(y(x))$, wobei f die Generalvoraussetzung aus Abschnitt 1.4 erfülle.

Hinweis: Entwickeln Sie $y_{i-1} = y(x_i - h)$ und $f_{i-1} = f(y(x_i - h))$ um $h = 0$.

Aufgabe 9.3 (Programmieraufgabe)[6 Punkte]
Im Folgenden sollen Mehrschrittverfahren implementiert werden, die einen Näherungsgraphen `[xi, yi]` (mit konstanter Schrittweite $x_{i+1} - x_i = h > 0$) an den Lösungsgraphen eines AWPs der Form

$$y'(x) = f(x, y(x)),\ y(x0) = y0 \in \mathbb{R}^d \quad \text{auf} \quad [x0, T]$$

berechnen. Schreiben Sie eine `MATLAB`-Funktion

```
function [xi,yi] = Adams_Bashforth(x0,y0,h,f,T),
```

die das Verfahren aus Aufgabe 9.2 (b) implementiert. Verwenden Sie bei der Implementierung das Verfahren von Runge[1], um y_1 für den ersten Schritt des Mehrschrittverfahrens zu berechnen. Schreiben Sie eine `MATLAB`-Funktion

```
function [xi,yi] = Milne_Simpson(x0,y0,h,f,fy,T,version),
```

die das Verfahren aus Aufgabe 9.1 implementiert. Verwenden Sie bei der Implementierung einmal (für version=1) das RKV

$$\begin{array}{c|c} c & A \\ \hline & b^T \end{array} := \begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & 1/6 & 2/6 & 2/6 & 1/6 \end{array}$$

und einmal (für version=2) das Verfahren von Runge, um y_1 für den ersten Schritt des Mehrschrittverfahrens zu berechnen. Erstellen Sie jeweils einen Fehlerplot analog wie in Teil (b) von Aufgabe 4.4 (dort für RKVs) beschrieben.

Aufgabe 9.4 (Votieraufgabe)
Schreiben Sie eine `MATLAB`-Funktion, welche das instabile Mehrschrittverfahren aus Beispiel 1.53 auf das AWP

$$y'(x) = y(x), \quad x \in [0, 1],$$

mit $y_0 = y(0) = 1$ und $y_1 = y(h) = e^h$ anwendet und plotten Sie die Näherungen für $h = 1/10, h = 1/20$ und $h = 1/50$.

[1] aus Abs. 1.3.4 der Vorlesung