Numerik von Differentialgleichungen
Sommersemester 2020
Prof. Dr. Bastian von Harrach
Dr. Sarah Eberle
M. Sc. Tim Jahn

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

8. Übungsblatt (erschienen am 09.06.2020)

Aufgabe 8.1 (Votieraufgabe)
Zeigen Sie, dass die Funktion

$$R(\zeta) = \frac{2 + \zeta - \frac{1}{5}\zeta^2 + \zeta^3}{2 - \zeta}$$

nicht die Stabilitätsfunktion eines Runge-Kutta-Verfahrens mit Konsistenzordnung 2 ist.

Aufgabe 8.2 (Votieraufgabe)
Bestimmen Sie die Stabilitätsfunktion der zweistufigen Methode in `ode23s` aus Beispiel 1.45 (c).

Aufgabe 8.3 (schriftliche Aufgabe)[6 Punkte]
Betrachten Sie die in Beispiel 1.45 beschriebene dreistufige Methode zur Berechnung von $\hat{y}$ in `ode23s` angewandt auf das autonome skalare AWP

$$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad y'(x) = f(y(x)), \quad y(0) = y_0.$$

(a) Beweisen Sie die folgenden Aussagen (für $h \searrow 0$)

(i) $k_1 = f + haf'f + h^2a^2f'^2f + O(h^3)$,

(ii) $k_2 = f + h\frac{1}{2}f'f + h^2\left((a - a^2)f'^2f + \frac{1}{8}f''f^2\right) + O(h^3)$,

(iii) $k_3 = f + h(1 - a)f'f + h^2\left(\frac{1}{2}f''f^2 + a^2f'^2f\right) + O(h^3)$,

wobei hier die Abkürzungen $f := f(y_0)$, $f' := f'(y_0)$ und $f'' := f''(y_0)$ verwendet werden.

Hinweis zu (iii): Es ist $d_{31} + d_{32} = 2a$ und $\frac{1}{2} - d_{31}a - \frac{1}{2}d_{32} + a = 2a^2$.

(b) Zeigen Sie mithilfe von Teil (a), dass $\hat{y}_1 = y(h) + O(h^4)$ gilt. *Hinweis:* Es ist $4a - 2a^2 = 1$.

Aufgabe 8.4 (Programmieraufgabe)[6 Punkte]
Im Folgenden sollen linear implizite Verfahren implementiert werden, die einen Näherungsgraphen `[xi, yi]` (mit konstanter Schrittweite $x_{i+1} - x_i = h > 0$) an den Lösungsgraphen eines autonomen AWPs der Form

$$y'(x) = f(y(x)),\ y(x_0) = y_0 \in \mathbb{R}^d \quad \text{auf} \quad [x_0, T]$$

berechnen. Schreiben Sie `MATLAB`-Funktionen

```
function [xi,yi] = linear_impl_Euler(x0,y0,h,f,Jf,T)
```

bzw.

```
function [xi,yi] = linear_impl_midpoint(x0,y0,h,f,Jf,T),
```

die die linear impliziten Verfahren aus Beispiel 1.45 (a) bzw. (b) implementieren. Dabei soll mit **Jf** die Ableitung $f'(y)$ übergeben werden. Testen Sie die Funktionen analog Teil (c) Aufgabe 3.4.