Numerik von Differentialgleichungen
Sommersemester 2020
Prof. Dr. Bastian von Harrach
Dr. Sarah Eberle
M. Sc. Tim Jahn

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

7. Übungsblatt (erschienen am 02.06.2020)

Aufgabe 7.1 (Votieraufgabe)
Sei $R(\zeta) := 1+\zeta b^T(I-\zeta A)^{-1}\mathbb{1} \in \mathbb{C}$ die Stabilitätsfunktion einer allgemeinen Runge-Kutta Methode. Bestimmen Sie die Stabilitätsfunktionen der Verfahren von Runge und Heun. Plotten Sie das jeweilige Stabilitätsgebiet (Definition 1.37) dieser Methoden in `MATLAB`.

Aufgabe 7.2 (Votieraufgabe)

(a) Bestimmen Sie die Stabilitätsfunktion für die Crank-Nicolson Methode und prüfen Sie, ob die Methode A-stabil, L-stabil oder Isometrie-erhaltend ist.

(b) Beweisen Sie die Aussage aus Bsp. 1.36(c) der Vorlesung: zeigen Sie, dass die implizite Mittelpunktsregel A-stabil, jedoch nicht L-stabil, aber zusätzlich Isometrie erhaltend ist.

Aufgabe 7.3 (schriftliche Aufgabe)[6 Punkte]
Betrachten Sie ein allgemeines 1-stufiges RKV

$$\begin{array}{c|c} c & A \\ \hline & b^T \end{array} = \begin{array}{c|c} c & c \\ \hline & 1 \end{array}.$$

und bestimmen Sie die Menge der c mit $0 \le c \le 1$, so dass das zugehörige Verfahren A-stabil ist.

Aufgabe 7.4 (Programmieraufgabe)[6 Punkte]
Wir betrachten für $u : (0,1)\times(0,T) \to \mathbb{R} : (x,t) \mapsto u(x,t)$ und $T > 0$ die 1d-Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1}$$

mit den Rand- und Anfangsbedingungen

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \qquad u(x,0) = g(x). \tag{2}$$

Wir diskretisieren die x-Koordinate mit $N+1$ äquidistanten Gitterpunkten $x_j = x_{j-1} + \Delta x, j = 1,2,\dots,N$, wobei $x_0 = 0$ ist. Weiterhin approximieren wir die Ableitung 2. Ordnung in (1) durch den zentralen Differenzenquotient 2. Ordnung, sodass $u_j := u(x_j,t)$ für $j = 1,\dots,N-1$ die folgende Gleichung erfüllen muss

$$\frac{\mathrm{d}u_j}{\mathrm{d}t} = \frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{(\Delta x)^2}.$$

Dieses System von $N-1$ gewöhnlichen Differentialgleichungen kann in Matrixform geschrieben werden

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = Au \quad \text{mit} \quad u = (u_1,\dots,u_{N-1})^T \quad \text{und} \quad A := \frac{1}{(\Delta x)^2}\begin{pmatrix} -2 & 1 & & \\ 1 & -2 & 1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & 1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(N-1)\times(N-1)}. \tag{3}$$

(a) Erstellen Sie einen plot des kleinsten Eigenwertes von A über $N = 1, ..., 50$.

Hinweis: Verwenden Sie `spdiags` um A zu erstellen, sowie `eigs` zur Bestimmung des Eigenwertes.

(b) Schreiben Sie `MATLAB`-Funktionen

```
[t,x,u] = ExpEuler(T,h,Delta_x,g,A)
[t,x,u] = ImpEuler(T,h,Delta_x,g,A)
[t,x,u] = Midpoint(T,h,Delta_x,g,A)
```

zur numerischen Lösung von (2)-(3) durch Verwendung des expliziten Eulerverfahrens, des impliziten Eulerverfahrens und der impliziten Mittelpunktsregel. Die Programme sollen in `[t,x,u]` die diskrete Approximation an den Graphen $(t, x, u(x, t))$ zurückgeben.

(c) Testen Sie ihre Programme aus dem (b)-Teil für $T = 2, \Delta x = 0.05$, A aus (3), $h_1 = 0.001$, $h_2 = 0.0015$, $h_3 = 0.003$, $h_4 = 0.03$ und der Anfangstemperaturverteilung

$$g(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{3}{4}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(i) Plotten Sie ihre Approximation `[x,u]` des expliziten und impliziten Eulerverfahrens, sowie der impliziten Mittelpunktsregel zum Zeitpunkt $t = 0.03$ für h_1 und h_2.

(ii) Plotten Sie ihre Approximation `[x,u]` des impliziten Eulerverfahrens und der impliziten Mittelpunktsregel zum Zeitpunkt $t = 0.03$ für h_3 und h_4.